Разнобой

1. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры в десятичной записи которого различны и которое уменьшается в 5 раз, если зачеркнуть первую цифру

2. Существует ли число, в десятичной записи квадрата которого имеется последовательность цифр «2019»?

3. На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач, каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую, и не решил с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

4. В шахматном турнире каждый участник встретился с каждым один раз. В каждом туре каждый участник проводил по одной встрече. Не меньше чем в половине всех встреч оба участника были земляками (из одного города). Докажите, что в каждом туре была хотя бы одна встреча между земляками

5. У каждого жителя города Тьмутаракань есть свои тараканы, не у всех поровну. Два таракана являются **товарищами**, если у них общий хозяин(в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми вледеет житель города, или среднее количество товарищей у таракана?

6. Докажите, что для любых натуральных $a_1, a_2, \ldots, a_k$ таких, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} > 1$, у уравнения $[\frac{n}{a_1}] + [\frac{n}{a_2}] + \ldots + [\frac{n}{a_k}] = n$ не больше чем $a_1 a_2 \ldots a_k$ решений в натуральных числах.

7. Император пригласил на праздник 2015 волшебников, некоторые из которых добрые, а остальные злые. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой может говорить что угодно. При этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет. На празднике император задает каждому волшебнику (в каком хочет порядке) по вопросу, на которые можно ответить «да» или «нет». Опросив всех волшебников, император изгоняет одного. Изгнанный волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. Затем император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (он может это сделать после любого вопроса). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

8. При каких натуральных n для всякого натурального $k \geq n$ найдется число с суммой цифр k, кратное n?

Разнобой

1. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры в десятичной записи которого различны и которое уменьшается в 5 раз, если зачеркнуть первую цифру

2. Существует ли число, в десятичной записи квадрата которого имеется последовательность цифр «2019»?

3. На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач, каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую, и не решил с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

4. В шахматном турнире каждый участник встретился с каждым один раз. В каждом туре каждый участник проводил по одной встрече. Не меньше чем в половине всех встреч оба участника были земляками (из одного города). Докажите, что в каждом туре была хотя бы одна встреча между земляками

5. У каждого жителя города Тьмутаракань есть свои тараканы, не у всех поровну. Два таракана являются **товарищами**, если у них общий хозяин(в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми вледеет житель города, или среднее количество товарищей у таракана?

6. Докажите, что для любых натуральных $a_1, a_2, \ldots, a_k$ таких, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} > 1$, у уравнения $[\frac{n}{a_1}] + [\frac{n}{a_2}] + \ldots + [\frac{n}{a_k}] = n$ не больше чем $a_1 a_2 \ldots a_k$ решений в натуральных числах.

7. Император пригласил на праздник 2015 волшебников, некоторые из которых добрые, а остальные злые. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой может говорить что угодно. При этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет. На празднике император задает каждому волшебнику (в каком хочет порядке) по вопросу, на которые можно ответить «да» или «нет». Опросив всех волшебников, император изгоняет одного. Изгнанный волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. Затем император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (он может это сделать после любого вопроса). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

8. При каких натуральных n для всякого натурального $k \geq n$ найдется число с суммой цифр k, кратное n?