

Дискретная непрерывность

1. В ряд стоят несколько солдат. Рост соседей отличается не более чем на 2,4 см. В строю есть солдат ростом 152 см, и солдат ростом 198 см. Докажите, что есть солдат, чей рост отличается от 170 см не более, чем на 1,2 см.

(а) Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
(б) Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?
(в) Пусть теперь школьники сидят по кругу. Всегда ли можно из них выбрать 20 подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?
(г) А 18?
2. В ряд сидит 15 мальчиков и 15 девочек

(а) Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
(б) Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?
(в) Пусть теперь школьники сидят по кругу. Всегда ли можно из них выбрать 20 подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?
(г) А 18?
3. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары – черные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.
4. В некоторых клетках таблицы 50×50 расставлены числа -1 и 1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.
5. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?
6. В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдется четное число.
7. Дракон заточил в темницу рыцаря и выдал ему 100 разных монет, половина из которых волшебные (какие именно – знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает все монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в кучках окажется поровну волшебных монет или поровну обычных, дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем (а) на 50-й день? (б) на 25-й день?
8. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовем пару из мальчика и девочки хорошей, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

Дискретная непрерывность

1. В ряд стоят несколько солдат. Рост соседей отличается не более чем на 2,4 см. В строю есть солдат ростом 152 см, и солдат ростом 198 см. Докажите, что есть солдат, чей рост отличается от 170 см не более, чем на 1,2 см.

(а) Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
(б) Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?
(в) Пусть теперь школьники сидят по кругу. Всегда ли можно из них выбрать 20 подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?
(г) А 18?
2. В ряд сидит 15 мальчиков и 15 девочек

(а) Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
(б) Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?
(в) Пусть теперь школьники сидят по кругу. Всегда ли можно из них выбрать 20 подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?
(г) А 18?
3. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары – черные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.
4. В некоторых клетках таблицы 50×50 расставлены числа -1 и 1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.
5. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?
6. В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдется четное число.
7. Дракон заточил в темницу рыцаря и выдал ему 100 разных монет, половина из которых волшебные (какие именно – знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает все монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в кучках окажется поровну волшебных монет или поровну обычных, дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем (а) на 50-й день? (б) на 25-й день?
8. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовем пару из мальчика и девочки хорошей, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.