

КБШ

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. При любых наборах чисел a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n верно неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

1. При любых a, b, c докажите неравенство

$$a\sqrt{a^2 + c^2} + b\sqrt{b^2 + c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

2. При помощи КБШ докажите неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим набора неотрицательных чисел a_1, a_2, \dots, a_n :

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

3. При любых α, β докажите, что

$$\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha + \cos \beta \leq 2.$$

4. При любых положительных a_1, a_2, \dots, a_n докажите неравенство

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1^7 + a_2^7 + \dots + a_n^7) \geq (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5).$$

5. Даны положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n$. Докажите неравенство

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \dots + a_nb_nc_n)^3 \leq (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + \dots + c_n^3).$$

6. При положительных $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ докажите неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

7. При положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

8. Неотрицательные a, b, c, d таковы, что $a + b + c + d = 4$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 2.$$