Ортоцентр

В задачах листика (кроме 6-й) треугольник ABC — остроугольный и неравнобедренный; AA_1, BB_1, CC_1 — его высоты, H — ортоцентр (точка пересечения высот AA_1, BB_1, CC_1), O — центр описанной окружности треугольника ABC.

1. Докажите, что H является точкой пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$.

2. **(a)** Докажите, что $\angle CAO = \angle BAH$.
(b) Докажите, что $OA \perp B_1C_1$.

3. **(a)** Докажите, что точка, симметричная точке H относительно стороны треугольника ABC, лежит на описанной окружности этого треугольника.
(b) Докажите, что точка X, симметричная точке H относительно середины стороны BC, лежит на описанной окружности треугольника ABC, причём отрезок AX является её диаметром.

4. Докажите, что расстояние от точки O до стороны BC вдвое меньше длины отрезка AH.

5. Окружность, описанная вокруг треугольника AB_1C_1, вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что прямая KH делит сторону BC пополам.

6. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно вписанного четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что ортоцентры треугольников AKN, BKL, CML и DMN образуют параллелограмм.

7. Прямые AO и BC пересекаются в точке Q, а отрезки AH и B_1C_1 — в точке P. Точка M — середина BC. Докажите, что $HM \parallel PQ$.