[СУНЦ МГУ, Олимпиадная математика] Юлий Тихонов

[*2018–2019*] группа: Догоняющие *7 декабря 2018 г.*

Геометрическая кислота

1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Перпендикуляр, опущенный из вершины C на биссектрису угла ABD, пересекает прямую AB в точке C_1; перпендикуляр, опущенный из вершины B на биссектрису угла ACD, пересекает прямую CD в точке B_1. Докажите, что $B_1C_1 \parallel AD$.

2. Let $ABCD$ be a parallelogram in which the angle at B is obtuse and $AD > AB$. Points K and L are chosen on the diagonal AC such that $\angle ABK = \angle ADL$ (the points A, K, L, C are all different, with K between A and L). The line BK intersects the circumcircle ω of triangle ABC at points B and E, and the line EL intersects ω at points E and F. Prove that $BF \parallel AC$.

3. На плоскости дана прямая ℓ и две точки A и B по одну сторону от неё. На прямой ℓ выбраны точка M, сумма расстояний от которой до точек A и B наименьшая, и точка N, для которой расстояния до A и B равны: $AN = BN$. Докажите, что точки A, B, N, M лежат на одной окружности.

4. AB — диаметр окружности ω. Прямая ℓ касается окружности ω в точке B. Точки C, D выбраны на ℓ таким образом, что B находится на отрезке CD. E, F — точки пересечения ω и прямых AC, AD соответственно, а G, H — точки пересечения ω и прямых CF, DE. Докажите, что $AH = AG$.

5. Окружность, вписанная в угол с вершиной O, касается его сторон в точках A и B, K — произвольная точка на меньшей из двух дуг AB этой окружности. На прямой OB взята точка L такая, что прямые OA и KL параллельны. Пусть M — точка пересечения окружности ω, описанной около треугольника KLB, с прямой AK, отличная от K. Докажите, что прямая OM касается окружности ω.