

Неравенства

Пусть $a > 0$, $b > 0$. Тогда справедливы **неравенства между средними**:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

причём эти неравенства обращаются в равенства в том и только в том случае, когда $a = b$. Четыре выписанные величины называются соответственно *средним гармоническим*, *средним геометрическим*, *средним арифметическим* и *средним квадратическим* чисел a и b .

Стоит свернуть полный квадрат

1. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим.
2. Пусть $x > 1$. Что больше: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$ или $2\sqrt{x}$?

Подстановка в известные неравенства

3. Докажите неравенство между средним гармоническим и средним геометрическим.
4. При каких x дробь $(81 + 16x^4)/x^2$ принимает наименьшее значение?

Суммирование известных неравенств

5. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c).$$

6. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e).$$

Разные задачи

7. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то их сумма больше четырех.
8. Пусть $x + y = 1$. Докажите, что $x^8 + y^8 \geq 1/128$.
9. Докажите, что если $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и $xy + yz + xz \geq 12$, то $x + y + z \geq 6$.
10. Решите уравнение $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.