

## Отборочная олимпиада

**Задача 1.** На троллейбусном маршруте между Хамовническим валом и Парком культуры ходят 6 троллейбусов (интервалы между троллейбусами не обязательно одинаковые). Они идут без остановок с постоянными скоростями, и каждый из них, дойдя до конца маршрута, разворачивается и идет обратно. Написав олимпиаду, Егор, не застав троллейбус на Хамовническом валу, отправился к Парку культуры пешком. При этом он 18 раз встретил троллейбус, идущий к нему навстречу. Сколько раз троллейбусы обгоняли Егора, если добравшись до Парка Культуры, он не застал там ни одного троллейбуса?

*Решение.* Возьмем любой из троллейбусов. Моменты, когда он попадался Егору навстречу и когда он обгонял Егора, очевидно, чередовались. При этом первым и последним из них были моменты, когда троллейбус шёл Егору навстречу: иначе бы Егор застал бы троллейбус на Хамовническом валу или в Парке культуры. Поэтому каждый троллейбус попался Егору навстречу на один раз больше, чем обогнал его. Значит, троллейбусы обгоняли Егора 12 раз.  $\square$

**Задача 2.** Петя и Вася выписывают на доску 20-значное число, состоящее только из цифр от 1 до 5. Петя пишет первую цифру, Вася — вторую, Петя — третью и т. д. Если итоговое число делится на 9, то выигрывает Вася, если же нет, то Петя. Кто выиграет при правильной игре?

*Решение.* Признак делимости на 9: число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Пусть первым ходом Петя напишет цифру 1, а оставшимися ходами он будет писать цифру, которая будет давать в сумме с написанной Васей цифрой 6. Тогда после того как будет написана 19-я цифра на доске, сумма цифр числа будет равна  $1 + 6 \cdot 9$ , что дает остаток 1 при делении на 9. Теперь какую бы цифру не поставил Вася сумма цифр не будет делиться на 9, и следовательно само число не будет делиться на 9. Значит выиграет Петя.  $\square$

**Задача 3.** На основании  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  выбрана точка  $M$ . Из  $M$  на боковые стороны  $AB$  и  $BC$  опустили перпендикуляры  $ML$  и  $MN$  соответственно. На отрезке  $LB$  выбрана точка  $X$  такая, что  $AL = LX$ , а на отрезке  $NB$  — точка  $Y$  такая, что  $YN = NC$ . Докажите, что  $AY = XC$ .

Решение. Рис. 1.  $\triangle ABC$  — равнобедренный  $\Rightarrow \angle BAC = \angle BCA = \alpha$

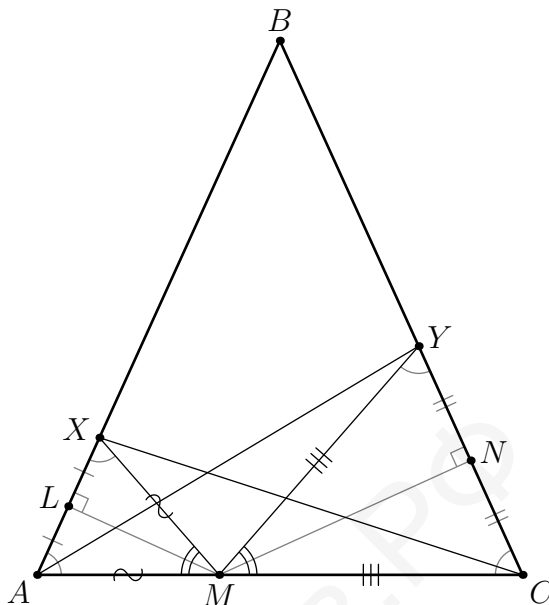


Рис. 1: к задаче 3

$\triangle AXM$  — равнобедренный, т.к.  $ML$  — высота и медиана.

Аналогично  $\triangle CYM$  — равнобедренный.

$\triangle AXM$  — равнобедренный  $\Rightarrow AM = XM$ ,  $\angle MAX = \angle MXA = \alpha$

$\triangle CYM$  — равнобедренный  $\Rightarrow CM = YM$ ,  $\angle MCY = \angle MYC = \alpha$

$$\angle AMX = 180^\circ - \angle MAX - \angle MXA = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\angle CMY = 180^\circ - \angle MCY - \angle MYC = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\angle AMX = \angle CMY \Rightarrow \angle AMX + \angle XMY = \angle XMY + \angle CMY \Rightarrow \angle AMY = \angle XMC$$

$$\triangle AMY = \triangle XMC \text{ т.к. } AM = XM, MY = MC, \angle AMY = \angle XMC \Rightarrow AY = XC$$

□

**Задача 4.** На доске написаны 5 натуральных чисел. Оказалось, что сумма любых трех из них делится на каждое из остальных. Докажите, что среди этих чисел найдутся четыре равных.

Решение. Пусть на доске были записаны натуральные числа  $a, b, c, d, e$ , причём  $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ . Тогда по условию  $a + b + c : e$  и  $b + c + d : e$ . Тогда вычтем из второго выражения первое и получим  $d - a : e$ . Но тогда в силу того, что  $a$  —

натуральное и  $a \leq d \leq e$  имеем  $0 \leq d - a \leq e - a < e$ . Но в полуинтервале  $[0, e)$  только 0 делится на  $e$ , следовательно  $a = d$ , а т.к.  $a \leq b \leq c \leq d$  то получаем  $a = b = c = d$ .  $\square$

**Задача 5.** У Лёлика есть 11 одинаковых на вид коробок; он знает, что их веса равны 10, 20, 30, ..., 110 кг. Еще у него есть тележка, которая выдерживает максимум 111 кг. Болик узнал веса всех коробок и хочет показать Лёлику, что первая коробка весит 10 кг.

Он может загрузить несколько из них в тележку и показать Лёлику, что тележка выдержала. За какое наименьшее количество загрузок тележки Болик сможет добиться требуемого?

*Решение.* Пусть Болик сначала загрузит в тележку коробки с весами 10, 20, 30 и 50 кг, а потом — коробки с весами 10, 40 и 60 кг. В обоих случаях тележка выдержит. Докажем, что это могло произойти только в том случае, если дважды была использована коробка веса 10 кг. Действительно, если бы Болик в эти два раза вместо коробок с весами 10, ..., 60 кг использовал соответственно коробки с весами  $w_1, \dots, w_6$  кг, то эти веса удовлетворяли бы системе неравенств  $w_1 + w_2 + w_3 + w_5 \leq 111$ ,  $w_1 + w_4 + w_6 \leq 111$ . Складывая, получаем  $w_1 + (w_1 + w_2 + \dots + w_6) \leq 222$ . Заметим, что сумма в скобках не меньше  $10 + 20 + \dots + 60 = 210$ . Отсюда следует, что  $w_1 \leq 222 - 210 = 12$ . Значит,  $w_1 = 10$ , то есть коробка веса 10 кг однозначно определена.

Осталось показать, что одной загрузки недостаточно. Если Болик загрузит одну коробку, то тележка выдержит в любом случае, то есть никакую коробку идентифицировать не удастся. Пусть Болик загрузит больше одной коробки, и тележка выдержит. Если коробка в 10 кг не загружена в тележку, то при замене ею любой коробки из тележки результат не изменится; значит, в этом случае Лёлик даже не сможет понять, находится ли эта коробка в тележке. Если же искомая коробка в тележке, то Лёлик не сможет понять, какая из (хотя бы двух) загруженных коробок — требуемая.  $\square$