

НОД и его разложение

Обозначение $(a, b) = \text{НОД}(a, b)$.

1. Найдите НОД всех чисел, в записи которых все цифры $1, 2, \dots, 9$ использованы по одному разу.
2. **Алгоритм Евклида.** На доске написаны числа a и b . Каждую минуту Арсений заменяет большее из них на разность этих чисел. Докажите, что:
 - (а) Общие делители у чисел на доске всегда одни и те же;
 - (б) Арсений не сможет получить натуральное число, меньшее (a, b) ;
 - (с) В какой-то момент на доске будет написан 0;
 - (д) Вместе с нулём на доске будет написано число (a, b) ;
3. Найдите $(\underbrace{11..11}_{51}, \underbrace{11..11}_{81})$.
4. Пусть $(m, 360) = 1$. Кроме того, пусть на плоскости дан угол в m градусов. Докажите, что при помощи одного только циркуля можно построить угол в 1 градус.
5. На доске написаны взаимно простые числа m и n . Каждую минуту модуль разности этих чисел записывается вместо наибольшего из них. Докажите, что в какой-то момент на доске будут написаны две единицы.
6. **Соотношение Безу.** Для любых целых чисел a и b найдутся такие целые числа x, y , что $ax + by = (a, b)$.
7. У Влада есть 25 мензурок: 1 мл, 2 мл, 3 мл, $\dots$, 25 мл. Он хочет выбрать 10 из них так, чтобы с помощью любых двух мог бы отмерить 1 мл. Сколько есть способов это сделать?
8. На доске написано два различных натуральных числа a, b . Меньшее из них стирается и заменяется на число $\frac{ab}{|a-b|}$. Докажите, что в какой-то момент времени на доске окажутся два равных числа.
9. Докажите, что для любых взаимно простых чисел a и b найдутся такие целые p и q , что числа $p + na$ и $q + nb$ взаимно просты при любом натуральном n .
10. Аня нашла себе интересное занятие. Она написала на доске две единички, потом между ними написала их сумму. Ее это так захватило, что она продолжила: брала ряд чисел, который у нее получился на предыдущем шаге, и между двумя соседними числами писала их сумму (старые числа при этом не стирала). Сколько раз она выписала произвольное число n ?