

## Индукция

### Упражнения

- Докажите:  $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$
- Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на любое количество правильных, большее 5.

### Алгебра

- Докажите:
  - $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
  - $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  - $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$
- Для каких натуральных  $n$  выполняется неравенство:  $2^n > n^2$
- Известно, что  $x + \frac{1}{x}$  – целое число. Докажите, что  $x^n + \frac{1}{x^n}$  – также целое при любом целом  $n$ .
- Докажите, что любое натуральное число представимо в виде суммы различных элементов Фибоначчи.
- Докажите, что  $n^n > (n + 1)^{n-1}$ , при  $n > 1$ .
- Покажите, что любое число представимо в виде  $*1^2 * 2^2 * 3^2 * \dots * n^2$ , для некоторого  $n$  и выбора + или – вместо каждой \*
- Докажите, что при  $n > 2$ , число  $n!$  можно представить в виде суммы  $n$  его различных делителей.
- Дана бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ . Известно, что  $a_2 = 2$  и  $a_{nm} = a_n a_m$  для каждой пары взаимно простых  $m > 1$  и  $n > 1$ . Докажите, что  $a_n = n$  для всех  $n$ .

### Комбинаторика

- Треугольник разбили  $n$  отрезками с концами на сторонах. Докажите, что среди получившихся областей есть хотя бы один треугольник.
- Докажите, что для любого натурального  $n$  можно разбить квадрат со стороной  $2^n$  без угловой клетки на трехклеточные уголки.
- В прямоугольнике  $3 \times n$  стоят фишечки трёх цветов, по  $n$  штук каждого цвета. Доказать, что можно переставить фишечки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишечки всех цветов.

- $n$  человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трёх людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом  $n$ .
- В выпуклом  $n$ -угольнике ( $n \geq 3$ ) вершины покрашены в три цвета таким образом, что каждый цвет присутствует, причём никакие две соседние вершины не покрашены в один цвет. Докажите, что его можно разбить на пересекающимися диагоналями на треугольники, в каждом из которых вершины покрашены в разные цвета.
- Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты  $n$  на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?
- $n$  разбойников делят добычу. У каждого из них свое мнение о ценности той или иной доли добычи, и каждый из них хочет получить не меньше, чем  $\frac{1}{n}$  долю добычи (со своей точки зрения). Придумайте, как разделить добычу между разбойниками.