

Сравнения

Определение. Если два числа дают одинаковые остатки при делении на число n , то говорят, что они сравнимы по модулю m .

Записывают это так: $a \equiv b \pmod m$ или $a \equiv b \pmod m$.

Упражнение. Числа a и b сравнимы по модулю n тогда и только тогда, когда число $a - b$ сравнимо с 0 по модулю n .

Свойства сравнений.

- если $a \equiv b \pmod m$, $b \equiv c \pmod m$, то $a \equiv c \pmod m$;
 - $a \equiv a + km \pmod m$, где k — целое число;
 - если $a \equiv b \pmod m$, то $a + c \equiv b + c \pmod m$;
 - если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $a + c \equiv b + d \pmod m$;
 - если $a \equiv b \pmod m$, то $ac \equiv bc \pmod m$;
 - если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $ac \equiv bd \pmod m$;
 - если $a \equiv b \pmod m$, то $a^k \equiv b^k \pmod m$, где k — натуральное число.
- Найдите остаток от деления:
(а) $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$ на 11.
(б) $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ на 1000.
(с) $2016 \cdot 2017 \cdot 2018 + 2020 \cdot 2021 \cdot 2022$ на 2019.
 - Пусть a, b, c, d и n — натуральные числа, причем $a + b$ и $c + d$ делятся на n . Докажите, что $ac - bd$ делится на n .
 - Найдите остатки от деления числа 2^{2019} (а) на 3, 5, 7; (б) на 15, 17.
 - Докажите, что $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.
 - Найдите остаток от деления:
(а) $9^{2019} + 13^{2019}$ на 11.
(б) $9^{2018} + 13^{2018}$ на 11.
 - Докажите, что (а) $2^{2018} \equiv 3^{2018} \pmod 5$; (б) $2^{2016} \equiv 3^{2016} \pmod{13}$; (с) найдите еще хотя бы одно простое число p , для которого $2^{2016} \equiv 3^{2016} \pmod p$.
 - (а) Докажите, что $a^n - b^n$ делится на $a - b$.
(б) Докажите, что при нечётном n $a^n + b^n$ делится на $a + b$.

- Пусть A — произведение всех нечётных чисел от 1 до 2017, а B — произведение всех чётных чисел от 2 до 2018. Докажите, что $A + B$ делится на 2019.
- Вася выписал в тетрадку числа вида $100 \dots 01$ (иными словами, числа вида $10^k + 1$), меньшие 10^{2019} . Докажите, что простых из них не более 1% от общего числа.
- Натуральные числа a и b таковы, что $a^{12} + b^{12}$ и $a^{125} + b^{125}$ делятся на 257. Докажите, что $a^{2019} + b^{2019}$ делится на 257.
- Число $1 \underbrace{33 \dots 33}_k$ — простое. Докажите, что k — нечетное.