11 класс | Олимпиада | 15 апреля 2019

1. Все клетки доски 50×50 — белые. Разрешается перекрашивать в чёрный цвет любые три белых клетки, стоящие подряд по диагонали. Какое наибольшее количество клеток можно сделать чёрными?

2. Пусть $\{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$ — все натуральные делители натурального числа $n > 1$. Найдите все такие n, если

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_m - m\sqrt[m]{d_1 \cdot \ldots \cdot d_m} = (\sqrt{n} - 1)^2.$$

3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F. Точки X и Y — середины сторон AD и BC соответственно. Точка O — центр описанной окружности $ABCD$, а точка O_1 — центр описанной окружности треугольника EXY. Докажите, что $OF \parallel O_1E$.

4. Многочлен $P(x)$ таков, что $P(0) = 1$, $(P(x))^2 = 1 + x + x^{100} \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — некий многочлен. Докажите, что у многочлена $(P(x) + 1)^{100}$ коэффициент при x^{99} равен нулю.

11 класс | Олимпиада | 15 апреля 2019

1. Все клетки доски 50×50 — белые. Разрешается перекрашивать в чёрный цвет любые три белых клетки, стоящие подряд по диагонали. Какое наибольшее количество клеток можно сделать чёрными?

2. Пусть $\{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$ — все натуральные делители натурального числа $n > 1$. Найдите все такие n, если

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_m - m\sqrt[m]{d_1 \cdot \ldots \cdot d_m} = (\sqrt{n} - 1)^2.$$

3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F. Точки X и Y — середины сторон AD и BC соответственно. Точка O — центр описанной окружности $ABCD$, а точка O_1 — центр описанной окружности треугольника EXY. Докажите, что $OF \parallel O_1E$.

4. Многочлен $P(x)$ таков, что $P(0) = 1$, $(P(x))^2 = 1 + x + x^{100} \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — некий многочлен. Докажите, что у многочлена $(P(x) + 1)^{100}$ коэффициент при x^{99} равен нулю.

11 класс | Олимпиада | 15 апреля 2019

1. Все клетки доски 50×50 — белые. Разрешается перекрашивать в чёрный цвет любые три белых клетки, стоящие подряд по диагонали. Какое наибольшее количество клеток можно сделать чёрными?

2. Пусть $\{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$ — все натуральные делители натурального числа $n > 1$. Найдите все такие n, если

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_m - m\sqrt[m]{d_1 \cdot \ldots \cdot d_m} = (\sqrt{n} - 1)^2.$$

3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F. Точки X и Y — середины сторон AD и BC соответственно. Точка O — центр описанной окружности $ABCD$, а точка O_1 — центр описанной окружности треугольника EXY. Докажите, что $OF \parallel O_1E$.

4. Многочлен $P(x)$ таков, что $P(0) = 1$, $(P(x))^2 = 1 + x + x^{100} \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — некий многочлен. Докажите, что у многочлена $(P(x) + 1)^{100}$ коэффициент при x^{99} равен нулю.

11 класс | Олимпиада | 15 апреля 2019

1. Все клетки доски 50×50 — белые. Разрешается перекрашивать в чёрный цвет любые три белых клетки, стоящие подряд по диагонали. Какое наибольшее количество клеток можно сделать чёрными?

2. Пусть $\{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$ — все натуральные делители натурального числа $n > 1$. Найдите все такие n, если

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_m - m\sqrt[m]{d_1 \cdot \ldots \cdot d_m} = (\sqrt{n} - 1)^2.$$

3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F. Точки X и Y — середины сторон AD и BC соответственно. Точка O — центр описанной окружности $ABCD$, а точка O_1 — центр описанной окружности треугольника EXY. Докажите, что $OF \parallel O_1E$.

4. Многочлен $P(x)$ таков, что $P(0) = 1$, $(P(x))^2 = 1 + x + x^{100} \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — некий многочлен. Докажите, что у многочлена $(P(x) + 1)^{100}$ коэффициент при x^{99} равен нулю.