11 класс **Неравенство Караматы** 28 февраля 2019

1. а) Лемма о трёх хордах. Дана функция f, выпуклая на интервале (a,b). Докажите, что для любых $x,y,z \in (a,b)$ таких, что $z<y<x$, верно

$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \leqslant \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leqslant \frac{f(x)-f(y)}{x-y}.$$

б) Пусть $x,y,z,t \in [a,b]$, $x \geqslant y \geqslant z \geqslant t$ и $x+t=y+z$. Докажите, что тогда $f(x)+f(t) \geqslant f(y)+f(z)$.

Определение. Пусть $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ — невозрастающие наборы действительных чисел (т.е. $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$). Набор X *мажорирует* набор Y (пишут "$X \succ Y$" или "$Y \prec X$"), если выполнены следующие условия: 1) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$; 2) для всех $1 \leqslant k \leqslant n$ верно $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} y_i$.

2. а) Пусть $X \succ Y$. Докажите, что набор Y может быть получен из набора X при помощи конечной последовательности следующих операций: числа x_i и x_j $(x_i > x_j)$ заменяются на числа x_i-d и x_j+d, где d — положительное число такое, что при указанной замене не нарушается неубывающий порядок (т.е. $x_i > x_i-d \geqslant x_{i+1}$, $x_{j-1} \geqslant x_j+d > x_j$ и $x_i-d \geqslant x_j+d$).

б) Неравенство Караматы. Пусть $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_n \in [a,b]$ и $X=(x_1,\ldots,x_n) \succ Y=(y_1,\ldots,y_n)$. Докажите, что

$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n) \geqslant f(y_1)+f(y_2)+\ldots+f(y_n).$$

Для вогнутой функции выполнено аналогичное неравенство со знаком $\leqslant$.

3. Пусть a, b и c – длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

4. Пусть $x_1,\ldots,x_n \in [-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$. Докажите, что

$$\cos(2x_1-x_2)+\ldots+\cos(2x_n-x_1) \leqslant \cos x_1+\ldots+\cos x_n.$$

5. Неравенство Сегё. Пусть $\phi(x)$ — выпуклая функция и $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_{2n-1} \geqslant 0$. Докажите, что $\phi(a_1)-\phi(a_2)+\phi(a_3)-\ldots+\phi(a_{2n-1}) \geqslant \phi(a_1-a_2+a_3-\ldots+a_{2n-1})$.

6. Пусть $a,b,c>0$. Докажите, что $a^3+b^3+c^3+abc \geqslant \frac{2}{3}(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2)$.

7. Пусть $a,b,c,d>0$. Докажите, что

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2.$$

8. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$. Докажите, что

$$(1+\frac{a_1^2}{a_2})(1+\frac{a_2^2}{a_3})\ldots(1+\frac{a_n^2}{a_1}) \geqslant (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n).$$

11 класс **Неравенство Караматы** 28 февраля 2019

1. а) Лемма о трёх хордах. Дана функция f, выпуклая на интервале (a,b). Докажите, что для любых $x,y,z \in (a,b)$ таких, что $z<y<x$, верно

$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z} \leqslant \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leqslant \frac{f(x)-f(y)}{x-y}.$$

б) Пусть $x,y,z,t \in [a,b]$, $x \geqslant y \geqslant z \geqslant t$ и $x+t=y+z$. Докажите, что тогда $f(x)+f(t) \geqslant f(y)+f(z)$.

Определение. Пусть $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ — невозрастающие наборы действительных чисел (т.е. $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$). Набор X *мажорирует* набор Y (пишут "$X \succ Y$" или "$Y \prec X$"), если выполнены следующие условия: 1) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$; 2) для всех $1 \leqslant k \leqslant n$ верно $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} y_i$.

2. а) Пусть $X \succ Y$. Докажите, что набор Y может быть получен из набора X при помощи конечной последовательности следующих операций: числа x_i и x_j $(x_i > x_j)$ заменяются на числа x_i-d и x_j+d, где d — положительное число такое, что при указанной замене не нарушается неубывающий порядок (т.е. $x_i > x_i-d \geqslant x_{i+1}$, $x_{j-1} \geqslant x_j+d > x_j$ и $x_i-d \geqslant x_j+d$).

б) Неравенство Караматы. Пусть $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_n \in [a,b]$ и $X=(x_1,\ldots,x_n) \succ Y=(y_1,\ldots,y_n)$. Докажите, что

$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n) \geqslant f(y_1)+f(y_2)+\ldots+f(y_n).$$

Для вогнутой функции выполнено аналогичное неравенство со знаком $\leqslant$.

3. Пусть a, b и c – длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

4. Пусть $x_1,\ldots,x_n \in [-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$. Докажите, что

$$\cos(2x_1-x_2)+\ldots+\cos(2x_n-x_1) \leqslant \cos x_1+\ldots+\cos x_n.$$

5. Неравенство Сегё. Пусть $\phi(x)$ — выпуклая функция и $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_{2n-1} \geqslant 0$. Докажите, что $\phi(a_1)-\phi(a_2)+\phi(a_3)-\ldots+\phi(a_{2n-1}) \geqslant \phi(a_1-a_2+a_3-\ldots+a_{2n-1})$.

6. Пусть $a,b,c>0$. Докажите, что $a^3+b^3+c^3+abc \geqslant \frac{2}{3}(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2)$.

7. Пусть $a,b,c,d>0$. Докажите, что

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2.$$

8. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$. Докажите, что

$$(1+\frac{a_1^2}{a_2})(1+\frac{a_2^2}{a_3})\ldots(1+\frac{a_n^2}{a_1}) \geqslant (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n).$$