11 класс — Алгебра — 24 января 2019

1. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, таков, что коэффициент b рационален, а среди чисел c и $f(c)$ ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трехчлена $f(x)$ быть рациональным?

2. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что при всех $x, y \in \mathbb{R}$ верно равенство

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Обязательно ли функция $f(x)$ — чётная?

3. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел a и b верно неравенство $f(a^2 + b^2) \geqslant f(2ab)$. Докажите, что хотя бы один из корней этого трёхчлена — отрицательный.

4. Положительные x, y, z таковы, что $xyz \geqslant xy + yz + zx$. Докажите, что

$$\sqrt{xyz} \geqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

5. Положительные a, b, c таковы, что $ab + bc + ac = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geqslant 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

6. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2019 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$ и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

7. У многочлена $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ все коэффициенты лежат на отрезке $[100, 101]$. При каком наименьшем n у такого многочлена может быть действительный корень?

8. Натуральное число N представляется в виде

$$N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2,$$

где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, а d_1 и d_2 — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1 и d_1 найдутся два равных?

11 класс — Алгебра — 24 января 2019

1. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, таков, что коэффициент b рационален, а среди чисел c и $f(c)$ ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трехчлена $f(x)$ быть рациональным?

2. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что при всех $x, y \in \mathbb{R}$ верно равенство

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Обязательно ли функция $f(x)$ — чётная?

3. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел a и b верно неравенство $f(a^2 + b^2) \geqslant f(2ab)$. Докажите, что хотя бы один из корней этого трёхчлена — отрицательный.

4. Положительные x, y, z таковы, что $xyz \geqslant xy + yz + zx$. Докажите, что

$$\sqrt{xyz} \geqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

5. Положительные a, b, c таковы, что $ab + bc + ac = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geqslant 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

6. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2019 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$ и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

7. У многочлена $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ все коэффициенты лежат на отрезке $[100, 101]$. При каком наименьшем n у такого многочлена может быть действительный корень?

8. Натуральное число N представляется в виде

$$N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2,$$

где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, а d_1 и d_2 — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1 и d_1 найдутся два равных?