11–2 **Геометрия** 21 января 2019

1. Точка D на стороне BC остроугольного треугольника ABC такова, что $AB = AD$. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает сторону AC в точках A и K. Прямая DK пересекает перпендикуляр, опущенный из B на AC, в точке L. Докажите, что $CL = BC$.

2. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω, проведенные через точки B и C, пересекают касательную к ω, проведенную через точку A, в точках K и L соответственно. Прямая, проведенная через K параллельно AB, пересекается с прямой, проведенной через L параллельно AC, в точке P. Докажите, что $BP = CP$.

3. В боковых гранях тетраэдра провели по две высоты из вершин при основании тетраэдра. Затем в плоскостях боковых граней провели прямые, соединяющие основания этих высот. Докажите, что полученные три прямые параллельны одной плоскости.

4. Окружность пересекает каждую сторону ромба в двух точках и делит её на три отрезка. Обойдём контур ромба, начав с какой-нибудь вершины, по часовой стрелке, и покрасим три отрезка каждой стороны последовательно в белый, синий и красный цвета. Докажите, что сумма длин белых отрезков равна сумме длин красных отрезках.

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. На отрезке CL выбрана точка M. Касательная в точке B к окружности Ω, описанной около треугольника ABC, пересекает луч CA в точке P. Касательные в точках B и M к окружности Γ, описанной около треугольника BLM, пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые PQ и BL параллельны.

6. На плоскости даны точки A и B, а также прямая l, проходящая через точку B. Рассмотрим произвольную окружность ω, касающуюся прямой l в точке B и несодержащую внутри себя точку A. Касательные к ω, проведённые из точки A, касаются ω в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности ω.

7. Продолжения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Оказалось, что площади треугольников ABC_0, AB_0C и A_0BC равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

8. В окружности ω с центром в точке O провели непересекающиеся хорды AB и CD так, что $\angle AOB = \angle COD = 120°$. Касательная к ω в точке A пересекает луч CD в точке X, а касательная к ω в точке B пересекает луч DC в точке Y. Прямая l проходит через центры окружностей, описанных около треугольников DOX и COY. Докажите, что l касается ω.

11–2 **Геометрия** 21 января 2019

1. Точка D на стороне BC остроугольного треугольника ABC такова, что $AB = AD$. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает сторону AC в точках A и K. Прямая DK пересекает перпендикуляр, опущенный из B на AC, в точке L. Докажите, что $CL = BC$.

2. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω, проведенные через точки B и C, пересекают касательную к ω, проведенную через точку A, в точках K и L соответственно. Прямая, проведенная через K параллельно AB, пересекается с прямой, проведенной через L параллельно AC, в точке P. Докажите, что $BP = CP$.

3. В боковых гранях тетраэдра провели по две высоты из вершин при основании тетраэдра. Затем в плоскостях боковых граней провели прямые, соединяющие основания этих высот. Докажите, что полученные три прямые параллельны одной плоскости.

4. Окружность пересекает каждую сторону ромба в двух точках и делит её на три отрезка. Обойдём контур ромба, начав с какой-нибудь вершины, по часовой стрелке, и покрасим три отрезка каждой стороны последовательно в белый, синий и красный цвета. Докажите, что сумма длин белых отрезков равна сумме длин красных отрезках.

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. На отрезке CL выбрана точка M. Касательная в точке B к окружности Ω, описанной около треугольника ABC, пересекает луч CA в точке P. Касательные в точках B и M к окружности Γ, описанной около треугольника BLM, пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые PQ и BL параллельны.

6. На плоскости даны точки A и B, а также прямая l, проходящая через точку B. Рассмотрим произвольную окружность ω, касающуюся прямой l в точке B и несодержащую внутри себя точку A. Касательные к ω, проведённые из точки A, касаются ω в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности ω.

7. Продолжения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Оказалось, что площади треугольников ABC_0, AB_0C и A_0BC равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

8. В окружности ω с центром в точке O провели непересекающиеся хорды AB и CD так, что $\angle AOB = \angle COD = 120°$. Касательная к ω в точке A пересекает луч CD в точке X, а касательная к ω в точке B пересекает луч DC в точке Y. Прямая l проходит через центры окружностей, описанных около треугольников DOX и COY. Докажите, что l касается ω.