

1. а) По окружности длины 1 по часовой стрелке прыгает кузнечик прыжками постоянной иррациональной длины α . В некотором месте на этой окружности вырыта ямка длины ε . Докажите, что рано или поздно кузнечик попадёт в ямку.

б) Оцените сверху количество прыжков, которое потребуется кузнечику для повторного попадания в ямку, если точка старта находится в центре ямки.

2. Пусть, как и в предыдущей задаче, кузнечик прыгает по окружности с иррациональным шагом α и где-то на окружности есть ямка размера ε . Пусть за n прыжков кузнечик попал в ямку $k(n)$ раз. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = \varepsilon$.

3. Через два узла клетчатой бумаги проведены параллельные прямые. Докажите, что в образовавшейся замкнутой полосе лежит бесконечно много узлов сетки.

Непрерывная теорема Кронекера. Пусть по окружности длины 1 ползает n улиток $k_1, \dots, k_n$ со скоростями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Докажите, что если числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то независимо от положения ямок с длинами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ существует момент, когда все улитки попадут в свои ямки.

Дискретная теорема Кронекера. Пусть по окружности длины 1 прыгают n кузнечиков $k_1, \dots, k_n$ с длинами прыжков $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Докажите, что если числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то независимо от положения ямок с длинами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ существует момент, когда все кузнечики попадут в свои ямки.

4. а) Из непрерывной теоремы Кронекера для n улиток выведите дискретную теорему Кронекера для n кузнечиков.

б) Из дискретной теоремы Кронекера для n кузнечиков выведите непрерывную теорему Кронекера для $n + 1$ улитки.

5. Напомним, что n -мерный тор — это декартово произведение n окружностей, или же n -мерный куб, в котором точки с координатами вида $(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ склеены соответственно с точками $(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Тогда в условии теоремы Кронекера n кузнечиков/улиток,двигающихся по окружности, можно заменить на одного кузнечика или улитку, которые двигаются по n -мерному тору, и теорема превращается в то, при определённых условиях на скорость кузнечик или улитка попадут в ямку вне зависимости от её положения. Предположим, что ямка имеет размер (n -мерный объём) ε . Пусть кузнечик сделал n прыжков, $k(n)$ из которых попали в ямку. А улитка ползала время t , причём $h(t)$ времени провела в ямке. Докажите, что **а)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = \varepsilon$; **б)** $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{t} = \varepsilon$.

6. Пусть числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ не обязательно линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда назовём *следом* кузнечика множество точек тора $(x_1, \dots, x_n)$ таких, что для любых рациональных $q_0, q_1, \dots, q_n$ таких, что $q_0 + q_1\alpha_1 + \dots + q_n\alpha_n = 0$ существуют целые $m_1, m_2, \dots, m_n$ такие, что $q_0 + q_1(x_1 + m_1) + \dots + q_n(x_n + m_n) = 0$. Докажите, что если на торе есть ямка, являющаяся открытым множеством, то кузнечик попадёт в неё тогда и только тогда, когда его след пересекается с ямкой.

1. а) По окружности длины 1 по часовой стрелке прыгает кузнечик прыжками постоянной иррациональной длины α . В некотором месте на этой окружности вырыта ямка длины ε . Докажите, что рано или поздно кузнечик попадёт в ямку.

б) Оцените сверху количество прыжков, которое потребуется кузнечику для повторного попадания в ямку, если точка старта находится в центре ямки.

2. Пусть, как и в предыдущей задаче, кузнечик прыгает по окружности с иррациональным шагом α и где-то на окружности есть ямка размера ε . Пусть за n прыжков кузнечик попал в ямку $k(n)$ раз. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = \varepsilon$.

3. Через два узла клетчатой бумаги проведены параллельные прямые. Докажите, что в образовавшейся замкнутой полосе лежит бесконечно много узлов сетки.

Непрерывная теорема Кронекера. Пусть по окружности длины 1 ползает n улиток $k_1, \dots, k_n$ со скоростями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Докажите, что если числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то независимо от положения ямок с длинами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ существует момент, когда все улитки попадут в свои ямки.

Дискретная теорема Кронекера. Пусть по окружности длины 1 прыгают n кузнечиков $k_1, \dots, k_n$ с длинами прыжков $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Докажите, что если числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то независимо от положения ямок с длинами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ существует момент, когда все кузнечики попадут в свои ямки.

4. а) Из непрерывной теоремы Кронекера для n улиток выведите дискретную теорему Кронекера для n кузнечиков.

б) Из дискретной теоремы Кронекера для n кузнечиков выведите непрерывную теорему Кронекера для $n + 1$ улитки.

5. Напомним, что n -мерный тор — это декартово произведение n окружностей, или же n -мерный куб, в котором точки с координатами вида $(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ склеены соответственно с точками $(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Тогда в условии теоремы Кронекера n кузнечиков/улиток,двигающихся по окружности, можно заменить на одного кузнечика или улитку, которые двигаются по n -мерному тору, и теорема превращается в то, при определённых условиях на скорость кузнечик или улитка попадут в ямку вне зависимости от её положения. Предположим, что ямка имеет размер (n -мерный объём) ε . Пусть кузнечик сделал n прыжков, $k(n)$ из которых попали в ямку. А улитка ползала время t , причём $h(t)$ времени провела в ямке. Докажите, что **а)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = \varepsilon$; **б)** $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{t} = \varepsilon$.

6. Пусть числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ не обязательно линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда назовём *следом* кузнечика множество точек тора $(x_1, \dots, x_n)$ таких, что для любых рациональных $q_0, q_1, \dots, q_n$ таких, что $q_0 + q_1\alpha_1 + \dots + q_n\alpha_n = 0$ существуют целые $m_1, m_2, \dots, m_n$ такие, что $q_0 + q_1(x_1 + m_1) + \dots + q_n(x_n + m_n) = 0$. Докажите, что если на торе есть ямка, являющаяся открытым множеством, то кузнечик попадёт в неё тогда и только тогда, когда его след пересекается с ямкой.