

Определение. Скалярным произведением в пространстве V над полем \mathbb{F} называется операция $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ такая, что

- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ для любых $u, v \in V$;
- $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$ для любых $u, v, w \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$;
- если \mathbb{F} — упорядоченное поле (например, \mathbb{R} или \mathbb{Q}), то $\langle v, v \rangle \geq 0$, причем равенство достигается только при $v = 0$.

Два вектора u, v называются ортогональными, если $\langle u, v \rangle = 0$.

0. Пусть e_1, e_2, \dots, e_n — базис в пространстве V над полем \mathbb{F} . Определим операцию $f: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$: пусть векторы $u, v \in V$ раскладываются как $u = x_1e_1 + \dots + x_ne_n, v = y_1e_1 + y_ne_n$, тогда $f(u, v) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$. Докажите, что f является скалярным произведением в пространстве V .

1. Пусть $U \subset V$ — два конечномерных векторных пространства с размерностями k и n соответственно. Пусть U^\perp — множество векторов из V , ортогональных всем векторам из U . Докажите, что

а) U^\perp — векторное пространство. (Оно называется ортогональным дополнением пространства U в пространстве V .)

б) $\dim U^\perp = n - k$.

в) Если U и V — векторные пространства над \mathbb{Q} или над \mathbb{R} , то для любого вектора $v \in V$ однозначно определены векторы $u_1 \in U, u_2 \in U^\perp$ такие, что $u_1 + u_2 = v$.

2. В дворце пионеров 28 кружков. Школьники посещают кружки так, что любые два школьника посещают разные наборы кружков, а вместе — четное число кружков. Какое наибольшее количество школьников могутходить во дворец пионеров, если каждый из них посещает

а) нечетное; б) четное число кружков?

3. В городе k супружеских пар и n клубов. Известно, что для мужчины и женщины количество клубов, в которых они оба бывали, нечетно тогда и только тогда, когда они — муж и жена. Докажите, что $k \leq n$.

4. В КИМах Единой Государственной Олимпиады (ЕГО) n вопросов с ответами "да" и "нет", за каждый правильный ответ начисляется 1

первичный балл. ЕГО сдавали k участников, и при этом они дали такой набор ответов на вопросы, что экспертная комиссия может так прописать положительные веса вопросам, чтобы участники расположились по итоговым баллам в любом нужном порядке. Докажите, что $k \leq n$.

5. Пусть V — конечномерное пространство над \mathbb{R} с заданным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Докажите, что в пространстве V существует базис e_1, e_2, \dots, e_n такой, что $\langle e_i, e_i \rangle = 1$, а $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ при $i \neq j$. Такой базис называется ортонормированным.

6. Неравенство Фишера. Пусть A_1, \dots, A_m — различные непустые подмножества n -элементного множества. Докажите, что если пересечение любых двух различных из них состоит из l элементов, то $m \leq n$.

7. В ботаническом определителе растения описываются ста признаками. Каждый из признаков может либо присутствовать, либо отсутствовать. Определитель считается хорошим, если любые два растения различаются более чем по половине признаков. Доказать, что в хорошем определителе не может быть описано более 50 растений.

8. Ученики 11Б класса часто собираются группами и ходят в кафе-мороженое. После такого посещения они ссорятся настолько, что никакие двое из них после этого вместе мороженое не едят. К концу года выяснилось, что в дальнейшем они могут ходить в кафе-мороженое только поодиночке. Докажите, что если число посещений было к этому времени больше 1, то оно не меньше числа учеников в 11Б классе.