25.09.18

Симедиана треугольника_2

Продолжим изучение конструкций, связанных с симедианой треугольника.

1. А) Используя рис. 1, вспомните, два основных вида определения симедианы треугольника.

Б) Вспомните основное свойство и признак симедианы.

В) Сформулируйте определения симедианы как геометрического места точек.

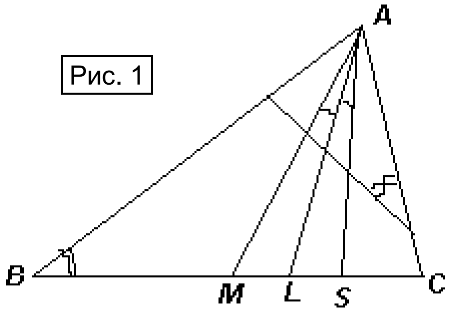

Рис. 1

Поищем теперь на симедиане «хорошие» точки.

2. Гармонический четырехугольник.

Продлим симедиану до пересечения с описанной окружностью.

Пусть в треугольнике ABC симедиана AS пересекает описанную около него окружность в точке D (см. рис. 2). Тогда $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

Доказательство. Так как точка *D* лежит на симедиане, то $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{AB^2}{AC^2}$. С другой стороны, $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{AB\cdot DB\cdot\sin\angle ABD}{AC\cdot DC\cdot\sin\angle ACD}$.

Приравняв правые части и используя, что $\angle ABD$ + $\angle ACD$ = 180°, получим искомое равенство.

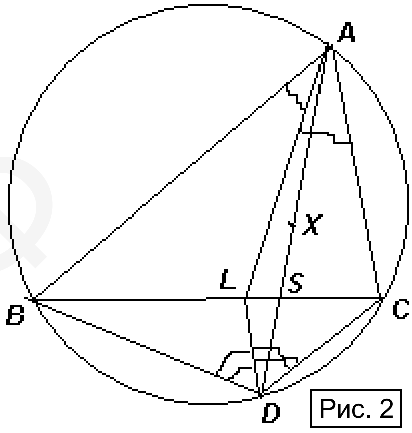

Рис. 2

Верно и обратное утверждение: ***если точка D лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, и*** $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$***, то луч AD содержит симедиану треугольника***. *Доказательство аналогично*.

Следствия (см. рис. 3, обоснуйте!).

1) Биссектрисы углов *BAC* и *BDC* пересекаются на стороне *BC*.

2) Точка *D* лежит на ***окружности Аполлония*** треугольника *ABC*.

3) $AB\cdot DC=AC\cdot DB$ (вписанный четырехугольник *ABCD*, для которого выполняется это равенство, называется ***гармоническим***)

4) Вписанный четырехугольник является ***гармоническим*** тогда и только тогда, когда каждая его диагональ является ***симедианой*** треугольников, на которые его разбивает другая диагональ.

3. Основная задача о симедиане.

Продлим симедиану еще дальше. Оказывается, на ней лежит еще одна знакомая точка.

Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть касательные к окружности, проведенные в вершинах B и C, пересекаются в точке P. Тогда прямая AP содержит симедиану треугольника ABC.

Это утверждение можно доказывать многими различными способами. Выберем тот, который использует уже доказанное.

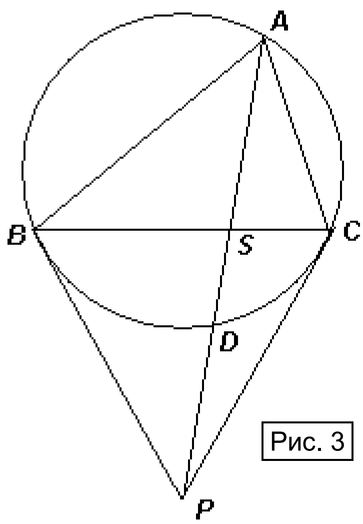

Рис. 3

Доказательство. Используем равенство угла между касательной и хордой и соответствующего вписанного угла, равенство отрезков касательных *PB* и *PC*, теорему синусов в треугольнике *ABC* (см. рис. 3): $\frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta ACP}}=\frac{AB\cdot PB\cdot\sin\angle ABP}{AC\cdot PC\cdot\sin\angle ACP}$ = $\frac{AB\cdot\sin\angle ACB}{AC\cdot\sin\angle ABC}$ = $\frac{AB^2}{AC^2}$. Следовательно, *AP* – симедиана треугольника *ABC*.

Знание рассмотренных фактов позволит вам решить сложные задачи, большинство из которых предлагались на разных этапах Всероссийской олимпиады или на олимпиадах по геометрии.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Дан треугольник ABC и такая точка X внутри него, что $\angle ABX = \angle CAX$ и $\angle BAX = \angle ACX$. Луч AX пересекает BC в точке S. Докажите, что: а) XS – биссектриса треугольника BXC; б) AS – симедиана треугольника ABC; в) X – середина отрезка AD, где D – точка пересечения луча AX с описанной окружностью треугольника ABC.

2. Окружность ω_1 проходит через точки A и B и касается прямой AC, а окружность ω_2 проходит через точки A и C и касается прямой AB. Докажите, что общая хорда этих окружностей является симедианой треугольника ABC.

3. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К этой окружности в точках E и F проведены касательные, которые пересекаются в точке P. Докажите, что прямая BP содержит медиану треугольника ABC.

4. Две окружности пересекаются в точках M и K. Из каждой точки A дуги MK одной окружности проводятся лучи AM и AK, пересекающие вторую окружность в точках B и C соответственно. Докажите, что медианы всех треугольников ABC, проведенные из вершины A, проходят через одну и ту же точку.

5. Дан треугольник ABC. Касательная в точке C к его описанной окружности пересекает прямую AB в точке D. Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK делит отрезок BC пополам.

6. Биссектрисы внешнего и внутреннего углов при вершине A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках D и E. Окружность с диаметром DE пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках A и X. Докажите, что AX – симедиана треугольника ABC.

7. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Прямая BD пересекает окружность ω_1, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω_2, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность ω_1 в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

8. Из точки A к окружности ω проведена касательная AD и произвольная секущая, пересекающая окружность в точках B и C (B лежит между точками A и C). Докажите, что окружность, проходящая через точки C и D и касающаяся прямой BD, проходит через фиксированную точку (отличную от D).

9. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P соответственно. Пусть M – середина отрезка PQ. Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω.

10. Пусть ABC – остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; M – середина стороны AB. В описанной окружности ω треугольника ABC проведён диаметр CC'. Прямая CM пересекает прямые AC' и BC' в точках K и L соответственно. Перпендикуляр к прямой AC', проведённый через точку K, перпендикуляр к прямой BC', проведённый через точку L, и прямая AB образуют треугольник. Докажите, что описанная окружность ω' этого треугольника касается окружности ω.