

Тетраэдры: прямая Эйлера, сферы 12 и 24 точек

Так как тетраэдры являются в каком-то смысле пространственными аналогами треугольников, то интересно посмотреть на некоторые факты, аналогичные тем, которые встречаются в геометрии треугольника. Наиболее полные аналогии возникают при рассмотрении ортоцентрического тетраэдра, так как только в нем высоты пересекаются в одной точке. В частности, в ортоцентрическом тетраэдре существует почти полная аналогия с прямой Эйлера треугольника.

Теорема. В ортоцентрическом тетраэдре центроид является серединой отрезка, соединяющего его ортоцентр и центр описанной около него сферы.

Доказательство. Пусть H – ортоцентр, M – центроид, O – центр описанной сферы тетраэдра $DABC$ (см. рис. 1). Тогда $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Для того чтобы доказать требуемое достаточно доказать, что $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Действительно, пусть точка X такова, что $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

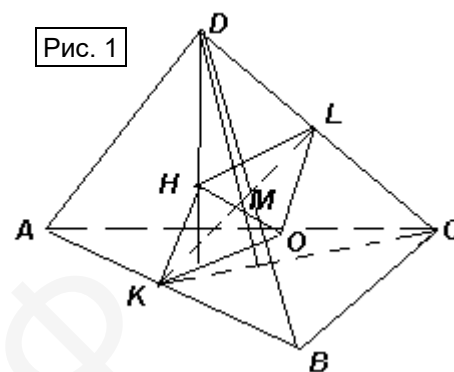
Тогда $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) =$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}). \quad \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = 0.$$

Следовательно, $\overrightarrow{AX} \perp \overrightarrow{CD}$. Аналогично доказывается, что $\overrightarrow{AX} \perp \overrightarrow{BC}$, поэтому прямая AX содержит высоту тетраэдра. Таким же образом получим, что прямые BX , CX и DX содержат высоты тетраэдра, то есть точка X совпадает с H .

Следовательно, **OH – прямая Эйлера для ортоцентрического тетраэдра.**

Другие аналогии для ортоцентрического тетраэдра – см. задачи 5 – 8. Остальные задачи содержат факты, аналогичные планиметрическим, для произвольных тетраэдров или других его видов. В случае затруднений вам могут помочь аналогичные факты или задачи планиметрии.



Упражнения и задачи для самостоятельного решения

В задачах 1 – 8 постарайтесь найти планиметрические аналоги.

1. На каждой грани правильного тетраэдра с ребром 1 во внешнюю сторону построены правильные тетраэдры. Четыре их вершины, не принадлежащие исходному тетраэдру, образовали новый тетраэдр. Найдите его ребра.

2. Пусть R и r – радиусы описанной и вписанной сфер тетраэдра, a – длина его наибольшего ребра, H – длина наименьшей высоты тетраэдра. Докажите, что $\frac{R}{r} > \frac{a}{H}$.

3. В тетраэдре $PABC$ проведены биссектрисы PA_1 , PB_1 и PC_1 треугольников PBC , PAC и PAB соответственно. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что четыре отрезка, соединяющие вершины тетраэдра с центрами окружностей, вписанных в противолежащие грани, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда равны произведения длин противоположных ребер тетраэдра.

5. Точки H и O – ортоцентр и центр описанной сферы ортоцентрического тетраэдра $DABC$ соответственно. Докажите, что: а) $\overrightarrow{HO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD})$;

б) середины любых двух скрещивающихся ребер этого тетраэдра вместе с точками O и H являются вершинами параллелограмма;

в) $OH^2 = 4R^2 - 3d^2$, где R – радиус описанной сферы, d – длина бимедианы;

г) $HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2 = 4R^2$.

6. а) Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре окружности девяти точек всех граней лежат на одной сфере.

б) Объясните, почему эту сферу называли **сферой двадцати четырех точек**.

7. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре центроиды граней, ортоцентры граней, а также точки, которые делят отрезки, соединяющие ортоцентр тетраэдра с его вершинами, в отношении 2 : 1 (считая от вершины) лежат на одной сфере, которая называется **сферой двенадцати точек**.

8. Пусть M' и H' – центроид и ортоцентр какой-либо грани ортоцентрического тетраэдра, K и N – точки пересечения лучей HM' и $H'M$ соответственно с описанной около тетраэдра сферой. Докажите, что: а) $\frac{HM'}{M'K} = \frac{1}{2}$; б) $\frac{H'M}{MN} = \frac{1}{3}$.

9. Сфера, вписанная в тетраэдр $SABC$, касается граней SAB , SBC и SCA в точках D , E и F соответственно. Какие значения может принимать сумма углов SDA , SEB и SFC ?

10. Высота равногранного тетраэдра равна h , а высота грани делится ортоцентром этой грани на отрезки, равные h_1 и h_2 . Докажите, что $h^2 = 4h_1h_2$.