

Непрерывность в стереометрии

По книжке А. Блинков, В. Гуровиц. *Непрерывность* (серия «Школьные математические кружки», – М.: МЦНМО, 2015).

В стереометрических задачах так же, как и в планиметрии, непрерывность часто используется для доказательства существования объекта (без явного его предъявления). Напомню, что для грамотного изложения решения, необходимо:

- 1) зафиксировать некоторые точки рассматриваемой конструкции, выбрать независимую переменную и показать, каким образом изменяется положение остальных точек в зависимости от нее;
- 2) объяснить, почему выбранная зависимость искомой величины от выбранной переменной является непрерывной функцией;
- 3) показать существование значений переменной, при которых искомая величина принимает значения как меньше, так и больше искомого;
- 4) использовать теорему о промежуточном значении, либо ее следствия, либо ее обобщения.

Отметим, что в стереометрических задачах происходит «расширение возможностей» за счет того, что «крайними» случаями могут служить планиметрические конструкции.

Пример 1. Существует ли тетраэдр $ABCD$, в котором $AB = CD = 8$, $AC = BD = 10$, $BC = 12$, $AD = 13$?

Ответ: существует.

Решение. Рассмотрим в пространстве два равных треугольника: ABC и DCB , длины сторон которых соответствуют условию задачи (см. рис. 1а). Плоскости ABC и DBC образуют двугранный угол с ребром BC : При малых изменениях величины φ этого угла расстояние $AD = x$ также мало изменяется, поэтому зависимость $x(\varphi)$ является непрерывной функцией.

Пусть $\varphi = 0$, то есть рассматриваемые треугольники лежат в одной плоскости и симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку BC , то есть $ABCD$ – равнобокая трапеция (см. рис. 1б). Тогда $x = AD < BC < 13$.

Пусть $\varphi = 180^\circ$, тогда рассматриваемые треугольники опять-таки лежат в одной плоскости и образуют параллелограмм $ABDC$ (см. рис. 1в). В этом случае, используя теорему о сторонах и диагоналях параллелограмма, получим: $x^2 + 12^2 = 2(8^2 + 10^2)$, откуда $x = \sqrt{184} > 13$. По **теореме о промежуточном значении** существует значение φ , при котором $AD = 13$, причем точки A, B, C и D являются вершинами тетраэдра.

В стереометрических задачах чаще, чем в планиметрических, используется также **теорема о множестве значений: функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем все промежуточные значения от наименьшего до наибольшего.**

Это утверждение следует из теоремы о промежуточном значении и из того, что такие функции принимают на отрезке свои экстремальные значения.

Пример 2. В пространстве дан произвольный угол A . Докажите, что найдется такая плоскость α , что проекцией угла A на α является угол величины φ , где φ принимает любое заранее заданное значение от 0 до 180° .

Решение. Пусть величина данного угла равна γ . Выберем сначала плоскость α таким образом, чтобы она была параллельна плоскости данного угла (см. рис. 2а).

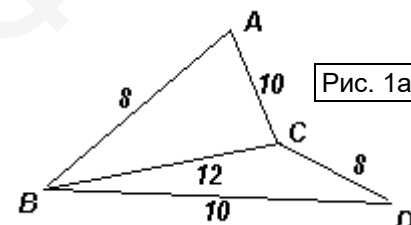


Рис. 1а

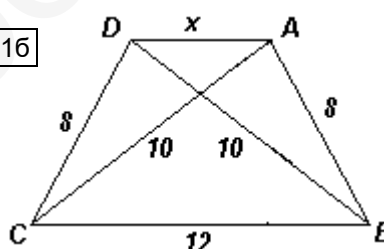


Рис. 1б

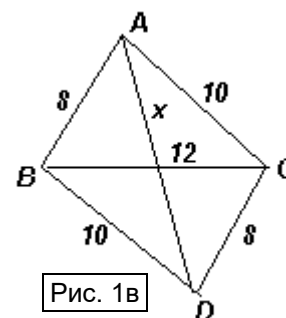


Рис. 1в

Тогда ортогональной проекцией угла A на α является угол A' , равный углу A , то есть угол величины γ . Проведем биссектрису угла A и будем поворачивать данный угол вокруг прямой m , содержащей биссектрису. Рассмотрим зависимость величины φ ортогональной проекции от угла поворота. При малых углах поворота величина ортогональной проекции изменяется мало, поэтому эта зависимость является **непрерывной функцией**.

При повороте на 90° получим угол, плоскость которого перпендикулярна α (см. рис. 2б). Его проекцией на плоскость α является угол A'' , величиной 0° . **По теореме о множестве значений** φ принимает любое значение от 0 до γ .

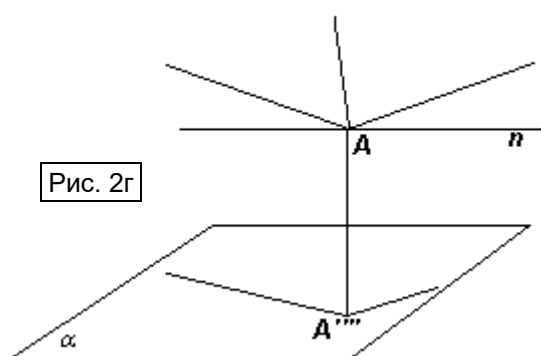
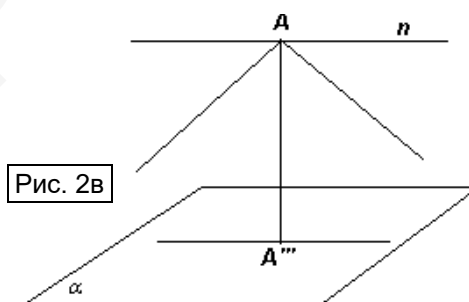
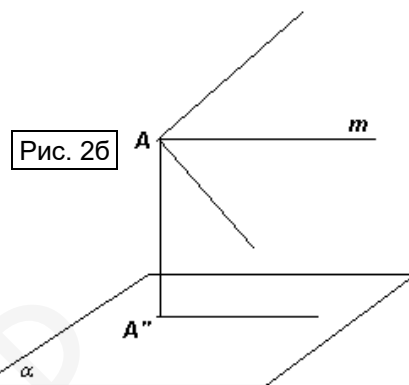
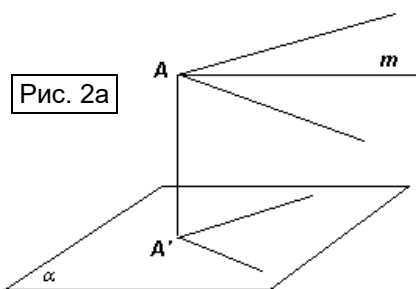
Выберем теперь плоскость α таким образом, чтобы биссектриса угла A пересекала α и была ей перпендикулярна (см. рис. 2в). Тогда ортогональной проекцией угла A на α является угол A''' , равный 180° . В плоскости данного угла через вершину A проведем прямую n , перпендикулярную биссектрисе, и будем поворачивать данный угол вокруг прямой n . И в этом случае, при малых углах поворота величина φ ортогональной проекции изменяется мало, поэтому зависимость φ от угла поворота является непрерывной функцией.

При повороте на 90° получим угол A , плоскость которого параллельна α , значит, его проекцией является острый угол A'''' , равный данному, то есть угол величины γ (см. рис. 2г). **По теореме о множестве значений** φ принимает любое значение от γ до 180° .

Таким образом, φ может принимать любое значение от 0 до 180° .

Поясним подробнее, почему при малых поворотах исходного угла величина его ортогональной проекции меняется мало. Отложим на сторонах угла A точки B и C так, чтобы $AB = AC$, и будем следить за проекцией $A'B'C'$ треугольника ABC .

При повороте вокруг биссектрисы m высота $АН$ треугольника ABC будет проектироваться в равную ей высоту $A'H'$, а проекция $B'C'$ будет непрерывно изменяться от длины BC до нуля. Поэтому и угол $B'A'C'$ будет меняться непрерывно от γ до нуля. При повороте вокруг прямой n , наоборот, $B'C'$ будет оставаться равной BC , а проекция $A'H'$ высоты будет непрерывно изменяться от нуля до $АН$, поэтому угол $B'A'C'$ будет меняться непрерывно от 180° до γ .



Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. а) Существует ли точка на высоте правильного тетраэдра, из которой ребро основания видно под углом 90° ?
- б) Существует ли правильная треугольная пирамида, у которой двугранный угол при боковом ребре равен 75° ?

2. Дан прямой двугранный угол. Можно ли провести плоскость так, чтобы она пересекла его грани по лучам, образующим угол 140° ?
3. а) В кубе $ABCD A'B'C'D'$ по ребрам $A'A$ и CB из вершин A' и C соответственно одновременно и с одинаковыми скоростями начинают двигаться точки X и Y . Найдите множество значений, которые может принимать расстояние XY , если ребро куба равно 1.
б) Две полуокружности имеют общий диаметр AB длины 2 и лежат в перпендикулярных плоскостях. Из точки A по одной из них, и из точки B по другой, одновременно и с одинаковыми скоростями начинают двигаться точки X и Y . Найдите множество значений, которые может принимать расстояние XY .
4. Дан правильный тетраэдр с ребром 1. Докажите, что у него существует четырехугольное сечение периметра 2,2.
5. Дан куб с ребром 1. Докажите, что у него существует сечения: а) четырехугольное площади 1,4; б) треугольное площади 0,8; в) пятиугольное и шестиугольное площади 1,2.
6. Существует ли правильная треугольная пирамида, у которой высота равна расстоянию между серединами двух скрещивающихся ребер?
7. Существует ли тетраэдр, у которого каждая грань является тупоугольным треугольником?
8. Основанием пирамиды служит выпуклый четырехугольник. Обязательно ли существует сечение этой пирамиды, не пересекающее основания и являющееся вписанным четырехугольником?
9. В пространстве дан треугольник, все углы которого меньше φ , где $\varphi < 120^\circ$. Докажите, что существует точка, из которой каждая сторона треугольника видна под углом φ .
10. Дан пространственный шарнирный четырехугольник $ABCD$ (длины его сторон и их порядок – зафиксирован, а углы могут меняться). Докажите, что существует такое его положение, при котором в тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах AC и BD – прямые.