

Теорема Паскаля

На занятиях по темам «Выход в пространство» и «Полярное соответствие» мы уже говорили об элементах проективной геометрии. Одну из теорем, находящуюся на стыке евклидовой и проективной геометрии, а именно, теорему Дезарга мы уже рассматривали. Сегодня – еще одна такая теорема, которая называется **теоремой Паскаля**.

Теорема. Три точки попарного пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой.

Доказательство. Первый способ. Пусть шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность, $M = (AB) \cap (DE)$, $P = (BC) \cap (EF)$, $N = (CD) \cap (FA)$ (см. рис. 1а). Докажем, что точки M , P и N лежат на одной прямой.

Рассмотрим точки попарного пересечения сторон, взятых через одну: $X = (AB) \cap (CD)$, $Y = (CD) \cap (EF)$, $Z = (EF) \cap (AB)$. По теореме о степени точки получим три равенства, которые удобно записать в векторной форме: $\overline{XA} \cdot \overline{XB} = \overline{XC} \cdot \overline{XD}$; $\overline{YC} \cdot \overline{YD} = \overline{YE} \cdot \overline{YF}$ и $\overline{ZA} \cdot \overline{ZB} = \overline{ZE} \cdot \overline{ZF}$ (1).

Рассмотрим треугольник XYZ и три прямые, пересекающие его стороны: (BC) , (DE) и (FA) . Применяя в каждом случае теорему Менелая, соответственно получим:

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{BZ}} \cdot \frac{\overline{ZP}}{\overline{PY}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{CX}} = -1; \quad \frac{\overline{XM}}{\overline{MZ}} \cdot \frac{\overline{ZE}}{\overline{EY}} \cdot \frac{\overline{YD}}{\overline{DX}} = -1$$

и $\frac{\overline{XA}}{\overline{AZ}} \cdot \frac{\overline{ZF}}{\overline{FY}} \cdot \frac{\overline{YN}}{\overline{NX}} = -1$. Перемножим

почленно эти равенства и произведем сокращения, учитывая равенства (1):

$$\frac{\overline{XM}}{\overline{MZ}} \cdot \frac{\overline{ZP}}{\overline{PY}} \cdot \frac{\overline{YN}}{\overline{NX}} = -1. \text{ Следовательно, точки } M, P \text{ и } N \text{ лежат на одной прямой (коллинеарны).}$$

Эта прямая называется прямой Паскаля для данного вписанного шестиугольника.

Так как теорема Паскаля по своей сути является проективной, то можно сразу предсказать, что произойдет, если в данном шестиугольнике: а) две стороны параллельны; б) две пары сторон параллельны.

Пусть, например, $(AB) \parallel (DE)$, то есть M – бесконечно удаленная точка, тогда (NP) , проходящая через M , будет параллельна этим сторонам. *Самостоятельно сделать чертеж.*

Если же $(AB) \parallel (DE)$ и $(BC) \parallel (EF)$, то M и P – бесконечно удаленные точки, поэтому, (MP) – бесконечно удаленная прямая, а точка N ей принадлежит. Это означает, что $(CD) \parallel (FA)$.

Отметим, что утверждение теоремы Паскаля останется верным, если точки A, B, C, D, E и F расположены на окружности произвольным образом, то есть если $ABCDEF$ – произвольная замкнутая ломаная (возможно с самопересечениями). Это дает возможность рассмотреть другой способ доказательства теоремы Паскаля.

Второй способ. Пусть шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность, $X = (AB) \cap (DE)$, $Y = (BC) \cap (EF)$, $Z = (CD) \cap (FA)$ (см. рис. 1б) Докажем, что точки X, Z и Y лежат на одной прямой.

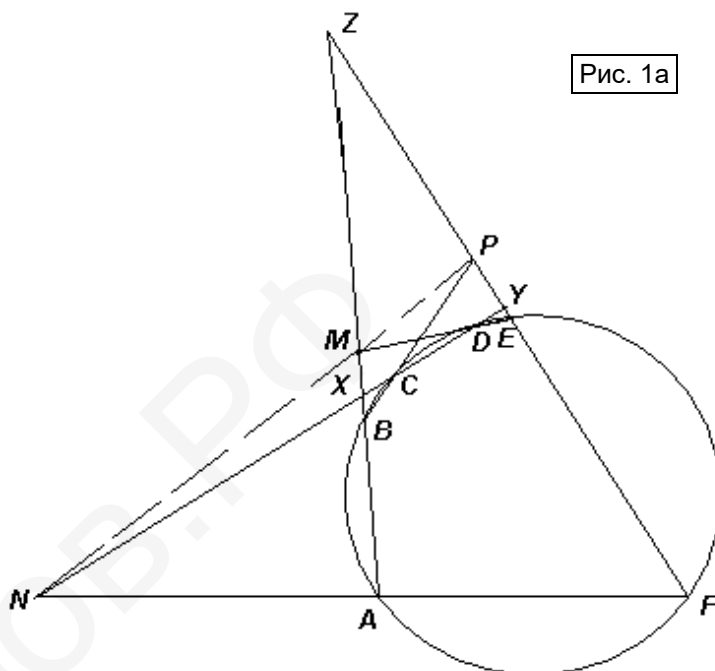


Рис. 1а

Треугольники AZD и CZF подобны. Кроме того, $\angle XAZ = \angle YCF$ и $\angle XDZ = \angle YFC$. Рассмотрим преобразование подобия, переводящее треугольник AZD в треугольник CZF . образом точки X будет такая точка X' , что $\angle X'CZ = \angle XAZ = \angle YCF$ и $\angle X'FZ = \angle XDZ = \angle YFC$. Следовательно, точка X' изогонально сопряжена точке Y относительно треугольника CZF . Тогда $\angle FZY = \angle CZX' = \angle AZX$, то есть точки X , Z и Y лежат на одной прямой.

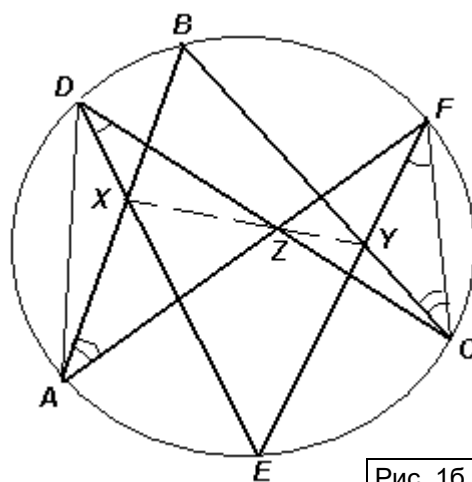


Рис. 16

Более того, теорема Паскаля в этом общем случае верна не только для точек, лежащих на окружности, но и для шести точек, принадлежащих любому коническому сечению!

Отметим также, что если на таком чертеже обозначить точки так, чтобы вписанный шестиугольник $ABCDEF$ был выпуклым, то получим следствие: три точки попарного пересечения его диагоналей лежат на одной прямой (см. рис. 1в).

Отметим также, что справедлива и теорема, обратная теореме Паскаля, которая уже целиком относится к проективной геометрии: **если три пары противоположащих сторон шестиугольника пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, то вершины шестиугольника принадлежат некоторому коническому сечению.**

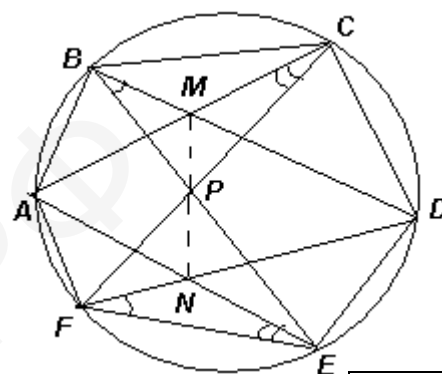


Рис. 1в

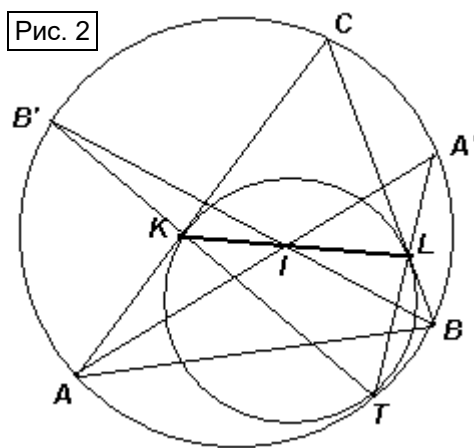
В качестве примера применения теоремы Паскаля рассмотрим ее неожиданную связь с **леммой о сегменте** и одним из свойств **полуописанной окружности**.

Пример. Полуописанная окружность треугольника ABC касается сторон AC и BC в точках K и L , а описанной окружности — в точке T . Докажите, что центр вписанной окружности I — середина отрезка KL .

Этот факт был доказан ранее, но с помощью теоремы Паскаля доказательство станет гораздо проще.

Решение. См. рис. 2. По лемме о сегменте, прямые TL и TK вторично пересекают окружность в точках A' и B' — серединах дуг BC и AC . Значит, AA' и BB' — биссектрисы треугольника, поэтому они пересекаются в точке I . По теореме Паскаля для ломаной $CAA'TB'B$ получим, что точки K , I и L лежат на одной прямой. Так как треугольник KCL — равнобедренный, то его биссектриса CI является также и медианой, что и требовалось.

Рис. 2



Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Не используя проективной формулировки теоремы Паскаля, докажите, что если две пары противоположащих сторон вписанного шестиугольника параллельны, то и третья пара сторон также параллельна.
2. Даны пять точек некоторой окружности. С помощью одной линейки постройте еще одну точку этой окружности.
3. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$.
 - а) Через произвольную точку X проведены прямые AX и DX , пересекающие прямые CD и AB в точках E и F соответственно и вторично пересекающие окружность в точках M и N

соответственно. Докажите, что прямые EF , MN и BC пересекаются в одной точке или параллельны.

б) Точка X такова, что $\angle BAX = \angle CDX = 90^\circ$. Докажите, что точка P пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ лежит на прямой XO .

4. Пусть O и I – центры описанной и вписанной окружностей прямоугольного треугольника, R и r – радиусы этих окружностей, J – точка, симметричная вершине прямого угла относительно I . Найдите OJ .

5. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D . Полувписанные окружности треугольников ACD и BCD , касающиеся сторон AD и BD соответственно, касаются стороны CD в одной и той же точке X . Докажите, что центр I вписанной окружности треугольника ABC лежит на перпендикуляре, опущенном из точки X на AB .

6. Хорда CD окружности с центром O перпендикулярна ее диаметру AB , а хорда AE делит пополам радиус OC . Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC .

7. Даны треугольник ABC и некоторая точка T . Пусть P и Q – основания перпендикуляров, опущенных из точки T на прямые AB и AC соответственно, а R и S – основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые TC и TB соответственно. Докажите, что точка X пересечения прямых PR и QS лежит на прямой BC .

8. Точки A и A_1 , лежащие внутри окружности с центром O , симметричны относительно точки O . Точки P , P_1 , Q и Q_1 лежат на окружности, причем сонаправлены лучи AP и A_1P_1 и лучи AQ и A_1Q_1 . Докажите, что точка пересечения прямых P_1Q и PQ_1 лежит на прямой AA_1 .

9. Точка M лежит на окружности, описанной около треугольника ABC , P – произвольная точка. Прямые AP , BP и CP пересекают окружность в точках A' , B' и C' соответственно. Докажите, что точки пересечения прямых MA' и BC , MB' и CA , MC' и AB лежат на одной прямой, проходящей через точку P .

10. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 и биссектрисы AA_2 и BB_2 ; а его вписанная окружность касается сторон BC и AC в точках A_3 и B_3 соответственно. Докажите, что прямые A_1B_1 , A_2B_2 и A_3B_3 пересекаются в одной точке или параллельны.