

Серия 2. Разнобой-повторение

1. На окружности ω с центром в точке O лежат точки A и B , на хорде AB выбрана точка X . Прямая, проходящая через X перпендикулярно прямой OX , пересекает касательные к ω , проведенные в точках A и B , в точках C и D . Докажите, что $CX = DX$.
2. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка X , что $\angle XDC = \angle BAC$ и $\angle XBC = \angle DAC$. Докажите, что $\angle BCA = \angle XCD$.
3. Пусть X — произвольная точка на высоте BH треугольника ABC . Прямые AX и BC пересекаются в точке P , CX и AB — в точке Q . Докажите, что HQ — биссектриса угла PHQ .
4. На сторонах BC , CA , AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) выбраны такие точки X , Q , P соответственно, что $APXQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y , симметричная точке X относительно прямой PQ , лежит на описанной окружности треугольника ABC .
5. В треугольнике ABC угол B равен 60° . Пусть AA_1 и CC_1 — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине B относительно прямой A_1C_1 , лежит на стороне AC .
6. Внутри треугольника ABC нарисованы три окружности ω_A , ω_B , ω_C , каждая из которых касается двух соответственных сторон треугольника. Эти три окружности также попарно касаются друг друга внешним образом: ω_B и ω_C — в точке A' , ω_C и ω_A — в точке B' , ω_A и ω_B — в точке C' . Докажите, что прямые AA' , BB' , CC' пересекаются в одной точке.
7. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω . Пусть PQ — диаметр ω , перпендикулярный прямой AC . Известно, что прямые BP и DQ пересекаются в точке X , а прямые BQ и DP — в точке Y . Докажите, что точки X и Y лежат на прямой AC .
8. Периметр треугольника ABC равен 4. На лучах AB и AC отмечены точки X и Y так, что $AX = AY = 1$. Отрезки BC и XY пересекаются в точке M . Докажите, что периметр одного из треугольников ABM и ACM равен 2.