# Теорема о трех центрах гомотетии

**Теорема.** (*О трёх центрах гомотетии*) Если композицией трёх гомотетии является тождественное преобразование плоскости, то их центры лежат на одной прямой.

**1.** На плоскости нарисованы три непересекающихся неравных круга. Для каждой пары кругов отметили две точки пересечения общих касательных: одну — внешних, вторую — внутренних. **(a)** (*Теорема о трёх колпаках*) Докажите, что точки пересечения внешних общих касательных лежат на одной прямой. **(b)** Докажите, что если центры кругов не лежат на одной прямой, то все шесть отмеченных точек служат вершинами *четырёхстронника*, т. е. лежат по три на четырёх прямых.

**2.** На плоскости зафиксированы две неравные окружности $\alpha$ и $\beta$. Произвольная окружность $\omega$ касается их внутренним образом в точках $A_\omega$ и $B_\omega$ соответственно. Докажите, что все прямые $A_\omega B_\omega$ проходят через одну точку, не зависящую от выбора $\omega$.

**3.** На продолжении стороны $CD$ трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) за точку $D$ отмечена точка $P$, точка $M$ — середина $AD$. Прямые $PM$ и $AC$ пересекаются в точке $Q$, $PB$ и $AD$ — в точке $X$, а $BQ$ и $AD$ — в точке $Y$. Докажите, что $M$ — середина $XY$.

**4.** Продолжения сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках $P$ и $Q$. На сторонах четырехугольника выбрали по точке так, что получился параллелограмм, причем одна пара его сторон параллельна $PQ$. Докажите, что центр параллелограмма лежит на одной из диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

**5.** Внутри треугольника $ABC$ расположены три непересекающихся круга: $\omega_A$, $\omega_B$, $\omega_C$. Каждый из них касается двух соответственных сторон треугольника. Круг $\omega$ касается внешним образом их всех в точках $A'$, $B'$, $C'$ соответственно. Докажите, что прямые $AA'$, $BB'$, $CC'$ пересекаются в одной точке.

**6.** Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи $AB$, $DC$ пересекаются в точке $P$, а лучи $AD$, $BC$ — в точке $Q$. Из точек $P$ и $Q$ внутрь углов $APD$ и $AQB$ проведено ещё по два луча, разбивающие четырёхугольник $ABCD$ на девять частей. Известно, что в части, примыкающие к вершинам $B$, $C$, $D$, можно вписать окружность. Докажите, что в часть, примыкающую к вершине $A$, также можно вписать окружность.

**7.** В угол с вершиной $O$ вписаны две окружности $\omega_1$ и $\omega_2$. Луч с началом в точке $O$ пересекает $\omega_1$ в точках $A_1$ и $B_1$, а $\omega_2$ — в точках $A_2$ и $B_2$ ($OA_1 < OB_1 < OA_2 < OB_2$). Окружность $\gamma_1$ касается внутренним образом окружности $\omega_1$ и касательных к $\omega_2$, проведённых из $A_1$. Окружность $\gamma_2$ касается внутренним образом окружности $\omega_2$ и касательных к $\omega_1$, проведённых из $B_2$. Докажите, что окружности $\gamma_1$ и $\gamma_2$ равны.

**8.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $AB + AD = CB + CD$. В треугольники $ABC$, $CDA$ вписаны окружности с центрами $I_1$, $I_2$. Докажите, что прямые $AC$, $BD$, $I_1I_2$ пересекаются в одной точке.

---

**9.** Point $P$ lies on side $AB$ of a convex quadrilateral $ABCD$. Let $\omega$ be the incircle of triangle $CPD$, and let $I$ be its incenter. Suppose that $\omega$ is tangent to the incircles of triangles $APD$ and $BPC$ at points $K$ and $L$, respectively. Let lines $AC$ and $BD$ meet at $E$, and let lines $AK$ and $BL$ meet at $F$. Prove that points $E$, $I$, and $F$ are collinear.