

Серия 18. Лемма биссектрального треугольника

1. (важная!) Пусть BL_B, CL_C – биссектрисы треугольника ABC .
(а) Докажите, что для каждой точки на отрезке $L_B L_C$ сумма расстояний от этой точки до прямых AB и AC равна расстоянию от нее до прямой BC .
(б) Как будет выглядеть утверждение задачи, если брать точку не на отрезке, а на прямой $L_B L_C$?
2. Используя первую задачу докажите, что прямая $L_B L_C$ пересекает прямую BC в основании внешней биссектрисы угла A .
3. Внутри треугольника ABC находится точка T , расстояния от которой до сторон треугольника равны x, y, z . Найдите геометрическое место точек T таких, что из отрезков длинами x, y, z можно составить треугольник.
4. Известно, что в треугольнике ABC точка пересечения медиан M принадлежит отрезку $L_B L_C$. Докажите, что в таком случае для высот треугольника ABC имеет место равенство $h_a = h_b + h_c$.
5. Биссектриса AL_A треугольника ABC пересекает $L_B L_C$ в точке T . Докажите, что $AT : TL_A = (AB + AC) : 2BC$.
6. (Болгария, 1997). Около треугольника ABC описана окружность Ω . Луч $L_B L_C$ пересекает Ω в точке X . Докажите, что $\frac{1}{XB} = \frac{1}{XA} + \frac{1}{XC}$.
7. Центр O описанной около треугольника ABC окружности лежит на отрезке $L_B L_C$. Докажите, что расстояние $АН$ от вершины до ортоцентра треугольника ABC равно сумме радиусов описанной около треугольника ABC и вписанной в него окружностей.
8. В треугольнике ABC прямая, проходящая через центры его описанной и вписанной окружностей, параллельна стороне BC . Докажите, что $L_B L_C$ делит пополам высоту, проведенную из вершины A .
9. Центр O описанной около треугольника ABC окружности лежит на отрезке $L_B L_C$. Докажите, что $r_a = R$, где r_a — радиус внеписанной окружности треугольника ABC , касающейся стороны BC .