

Серия 13. Полувписанная окружность

Во всех задачах этого листика дан треугольник ABC , вписанный в окружность Ω с центром в точке O . Точка I — центр вписанной в него окружности ω . Полувписанная окружность ξ_A касается сторон AB , AC и окружности Ω внутренним образом в точке T_A . Аналогично определены окружности ξ_B , ξ_C и точки T_B , T_C .

1. Докажите, что прямые, соединяющие точку T_A с серединами «меньших» дуг AB , AC окружности Ω , проходят через точки касания окружности ξ_A с прямыми AB и AC .
2. Докажите, что середины «меньших» дуг AB , AC окружности Ω вместе с точками A и T_A служат вершинами гармонического четырёхугольника.
3. Обозначим середины «меньших» дуг AB , AC окружности Ω через C' , B' соответственно и середину «большой» дуги BC через A'' . Докажите, что
 - (a) $T_A A$ — симедиана треугольника $B' T_A C'$;
 - (b) $T_A A''$ — медиана треугольника $B' C' T_A$;
 - (c) точки T_A , I , A'' лежат на одной прямой.
4.
 - (a) Докажите, что прямые AT_A , BT_B , CT_C проходят через центр X положительной гомотетии окружностей ω и Ω .
 - (b) Докажите, что точка, изогонально симметричная точке Нагеля, совпадает с точкой X .
5. **(Лемма Веррьера)** Докажите, что точка I лежит на отрезке, соединяющем точки касания окружности ξ_A со сторонами AB и AC .
6. Прямая, проходящая через вершину A , пересекает сторону BC в точке E и пересекает окружность Ω второй раз в точке F . Докажите, что окружность $(T_A EF)$ проходит через точку касания окружности ω со стороной BC .
7. Докажите, что полувписанные окружности треугольников CAT_A , BAT_A , соответствующие вершине A , касаются друг друга.
8. Докажите, что внешняя биссектриса угла $BT_A C$, прямая соединяющая точки касания окружности ξ_A со сторонами треугольника, прямая BC и прямая $T_B T_C$ пересекаются в одной точке.
9. Смотрите картинку

