Серия 12. Предрегиональный разнобой-2

1. В треугольнике ABC вневписанная окружность, лежащая напротив угла C , касается стороны AB в точке T. Пусть J — центр вневписанной окружности, лежащей напротив угла A, а M — середина AJ. Докажите, что $MT = MC$.

2. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты неравнобедренного остроугольного треугольника AB, M — середина AB. Описанные окружности треугольников AMA_1 и BMB_1, пересекают прямые AC и BC в точках K и L соответственно. Докажите, что K, M и L лежат на одной прямой.

3. Два четырехугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ симметричны друг другу относительно точки P. Известно, что четырехугольники A_1BCD, AB_1CD и ABC_1D вписанные. Докажите, что $ABCD_1$ тоже вписанный.

4. В треугольнике ABC провели биссектрису CL. Точки A_1 и B_1 симметричны точкам A и B относительно CL, A_2 и B_2 симметричны точкам A и B относительно L. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников AB_1B_2 и BA_1A_2. Докажите, что углы O_1CA и O_2CB равны.

5. В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности, вписанной в треугольник ABC, отличные от прямой AC. Они касаются этой окружности в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B, K_1 и K_2 лежат на одной прямой

6. На сторонах AB и CD квадрата $ABCD$ взяты точки K и M соответственно, а на диагонали AC — точка L так, что $ML = KL$. Пусть P — точка пересечения отрезков MK и BD. Найдите угол KPL.

7. Во вписанном пятиугольнике $ABCDE$ $AB = BC, CD = DE$. Отрезки AD и BE пересекаются в точке P, отрезок BD пересекает CA и CE в точках Q и T соответственно. Докажите, что треугольник PQT равнобедренный.

8. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. На луче CI отметили точку D. Точки K и L — основания перпендикуляров из точки I на прямые AB и AD соответственно. Прямая BI пересекает отрезок KL в точке P. Докажите, что угол BPD прямой.

9. Из точки A к окружности ω проведена касательная AD и произвольная секущая, пересекающая окружность в точках B и C (B лежит между точками A и C). Докажите, что окружность, проходящая через точки C и D и касающаяся прямой BD, проходит через фиксированную точку (отличную от D).

10. Окружности Ω_1 и Ω_2 пересекаются в точках M и N. Через точку A окружности Ω_1 проведены прямые AM и AN, пересекающие окружность Ω_2 в точках B и C, а через точку D окружности Ω_2 – прямые DM и DN, пересекающие Ω_1 в точках E и F, причём точки A, E, F лежат по одну сторону от прямой MN, а D, B, C – по другую. Докажите, что если $AB = DE$, то точки A, F, C и D лежат на одной окружности, положение центра которой не зависит от выбора точек A и D.