Инверсия

- (а) Пусть при инверсии с центром O точка A переходит в A' , а точка B переходит в B' . Докажите, что треугольники OAB и $OB'A'$ подобны.

(б) Докажите, что при инверсии с центром O прямая ℓ , не проходящая через O , переходит в окружность, проходящую через O , а окружность, проходящая через O , переходит в прямую, не проходящую через O .

(в) Докажите, что при инверсии с центром O окружность, не проходящая через O , переходит в окружность, не проходящую через O .
- Докажите, что при инверсии касающиеся окружности (прямая и окружность) переходят в касающиеся окружности, или в касающиеся окружность и прямую, или в пару параллельных прямых.
- Пусть при инверсии с центром O точка A переходит в A' , а точка B переходит в B' . Докажите, что $A'B' = \frac{R^2}{OA \cdot OB} AB$.
- Точки A и B лежат на окружности ω . Касательные к окружности, проходящие через точки A и B , пересекаются в точке P . Докажите, что P является образом середины хорды AB при инверсии относительно ω .
- Что является образом описанной окружности треугольника при инверсии относительно вписанной окружности?
- Через точку A к окружности ω с центром O проведены касательные AX и AU , а также секущая, пересекающая окружность в точках Z и T . Докажите, что точки Z, T, O и середина XU лежат на одной окружности.
- Дана точка P , лежащая вне окружности ζ . ζ' — образ ζ , при инверсии относительно окружности с центром P и радиусом 1. Точки A и B — основания касательных из точки P к ζ' . Докажите, что образ центра ζ при данной инверсии — середина отрезка AB .
- Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, таковы, что ω_2 и ω_4 касаются каждой из окружностей ω_1 и ω_3 . Докажите, что точки касания лежат на одной окружности или прямой.
- Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ проходят через точку X . A_{ij} — вторая точка пересечения окружностей ω_i и ω_j . Докажите, что существует точка Y такая, что для любых i, j, k точки A_{ij}, A_{ik}, A_{jk} и Y лежат на одной окружности.
- Пусть p — полупериметр треугольника ABC . Точки E и F на прямой BC таковы, что $AE = AF = p$. Докажите, что описанная окружность треугольника AEF касается внеписанной окружности треугольника ABC со стороны BC .