

Кратчайшие маршруты

Использованы материалы из книжки М.А. Волчкевича «Уроки геометрии в задачах. 7 – 8 классы», – М.: МЦНМО, 2016.

В течение двух занятий мы займемся геометрическими задачами, связанными с наибольшими и наименьшими значениями каких-либо величин. Такие задачи называются **экстремальными** (от слова *extremum* – крайний). Задачи сегодняшнего занятия будут связаны с поиском кратчайших маршрутов или наименьших сумм расстояний.

В качестве примера рассмотрим знаменитую задачу Герона Александрийского.

Пример. Дана прямая m и точки A и B , лежащие в одной полуплоскости относительно m .
 а) Постройте на прямой m такую точку M , чтобы ломаная AMB имела наименьшую длину.
 б) Постройте на прямой m отрезок CD заданной длины (много меньшей, чем расстояние от A до B) так, чтобы длина ломаной $ACDB$ была наименьшей.

Идея решение может возникнуть из физических соображений. Из курса физики известно, что свет распространяется прямолинейно с одной и той же скоростью по кратчайшему пути. Представим себе, что прямая m – это зеркало. Тогда луч, выпущенный из точки A и попавший в точку B , отразившись от зеркала в точке M , пройдет так, что угол его падения будет равен углу отражения, то есть равны углы, которые образуют эти лучи с перпендикуляром к прямой m (см. рис. 1а). Следовательно, должны быть равны и углы, которые эти лучи образуют с прямой m , то есть, продлив AM за точку M , мы получим равные углы. Теперь эту идею можно оформить геометрически.

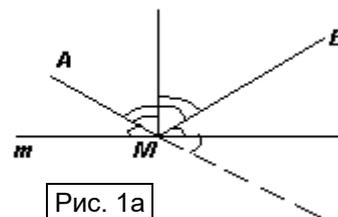


Рис. 1а

Решение. а) Пусть искомая точка M построена. Рассмотрим точку B' , симметричную точке B относительно прямой m (см. рис. 1б). Длина ломаной AMB равна: $AM + MB = AM + MB'$. Эта длина будет наименьшей из возможных, если точка M лежит на отрезке AB' . Действительно, для любой другой точки N , лежащей на прямой CD , $AN + NB = AN + NB' > AB' = AM + MB'$.

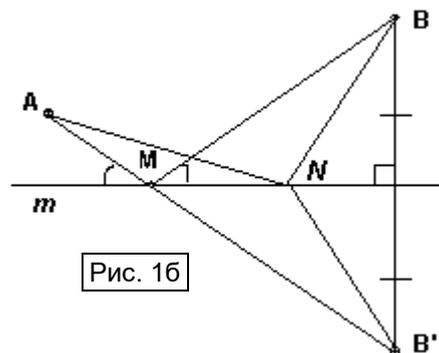


Рис. 1б

Таким образом, решение задачи сводится к построению точки B' , симметричной точке B относительно прямой m . Искомая точка M является пересечением прямых AB' и m .

Понятно, что точки A и B равноправны, поэтому можно было строить точку, симметричную точке A . Отметим также, что эту задачу можно формулировать различным образом, моделируя различные жизненные ситуации.

б) Пусть искомые точки C и D построены и отрезок CD имеет заданную длину (см. рис. 1в). Длина ломаной $ACDB$ зависит только от суммы длин AC и BD , поэтому «передвинем» отрезок BD параллельно самому себе так, чтобы он занял положение $B'C$ (то есть рассмотрим **параллельный перенос** на вектор \overline{DC}), тогда отрезки AC и $B'C$ образуют равные углы с прямой m , что дает наименьшее значение суммы длин AC и BD .

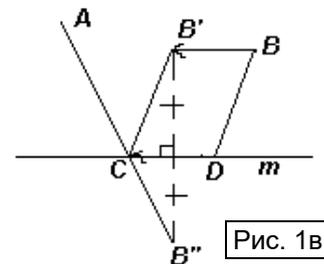


Рис. 1в

Таким образом, после выполнения параллельного переноса вдоль прямой m на отрезок заданной длины (например, в направлении от B к A), решение задачи сведется к построению точки C , описанному в пункте а). Затем «передвинем» все обратно (выполним **параллельный перенос** на вектор \overline{CD} , обратный к рассмотренному), и получим требуемую ломаную.

Отметим, что точка B'' , использованная при описанном построении является образом точки B при **скользящей симметрии** (композиции осевой симметрии и параллельного переноса вдоль этой оси).

Таким образом, многие задачи, связанные с наименьшей длиной пути, решаются с использованием осевой симметрии и параллельного переноса. Но, наряду с ними, могут использоваться и другие приемы, которые вам придется придумать.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до его вершин наименьшая.
2. а) Дан острый угол AOB и точка M внутри него. На сторонах угла постройте точки X и Y так, чтобы периметр треугольника MXY был наименьшим.
б) Найдите этот периметр, если $\angle AOB = 30^\circ$, $OM = 1$.
3. Внутри острого угла AOB даны точки M и N . Постройте на сторонах угла точки X и Y так, чтобы периметр четырехугольника $XMNY$ был наименьшим.
4. Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до всех вершин и до всех сторон треугольника – наименьшая.
5. а) Населенные пункты A и B разделены каналом с параллельными берегами. В каком месте необходимо построить мост (перпендикулярно берегам), чтобы длина пути из одного пункта в другой была наименьшей?
б) Населенные пункты A и B разделены двумя непараллельными друг другу каналами (у каждого канала два берега параллельны). Где нужно построить мосты, чтобы длина пути из одного пункта в другой была наименьшей?
6. Дан равносторонний треугольник ABC . Постройте прямую m так, чтобы сумма расстояний от вершин треугольника до m была наименьшей.
7. Один из углов остроугольного треугольника равен 30° . На сторонах треугольника отмечено по одной точке. Докажите, что наименьший периметр треугольника с вершинами в этих точках равен одной из высот данного треугольника.
8. Дан остроугольный треугольник ABC . На его сторонах отмечены точки K , L и M (по одной на каждой стороне). Укажите положение этих точек, для которого периметр треугольника будет наименьшим. (**Задача Фаньяно**)
9. На каждой стороне прямоугольника отмечено по точке. Докажите, что наименьший периметр четырехугольника с вершинами в этих точках равен сумме диагоналей прямоугольника.
10. Дан угол и точка внутри него. Постройте прямую, проходящую через эту точку, которая отсекает от угла треугольник наименьшего периметра.