

Серия 26. Функциональные уравнения. Тёмные свойства.

Про композиции.

1. Конечно или бесконечно множество таких функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что $f(f(x)) = x$?
2. Существует ли такая функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что
 - а) $f(f(x)) = x^2 - 17$;
 - б) $f(f(x)) = x^2 + 4x + 3$?
3. Верно ли, что для любой функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ существует не равная ей и нетождественная функция $g(x)$, что $f(g(x)) = g(f(x))$.

Про инъективность и сюръективность.

4. Найдите все такие функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что
$$f(f(x)) + 2f(y) = 2f(x) + 4y.$$
5. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которых
$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y.$$
6. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что для любых x, y выполнено $f(f(x) + f(y)) = f(f(x)) + f(f(y))$. Обязательно ли график f является прямой или всюду плотным множеством?
7. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $f(2f(x)) = x$. Найдите $f(f(2014))$.
- 8(была на сборах). Найдите все такие функции $f(x): [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$, что для любого $x \geq 0$ выполнено равенство $6f(f(x)) + f(x) - x = 0$.

Вишенка на торте.

9. Find all functions $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ such that for any $x, y \in (0, \infty)$,
$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)(f(f(x^2)) + f(f(y^2))).$$

Рубрика “Намедни”.

17-8. В некоторой стране из каждого города в другой можно проехать, минуя остальные города. Известна стоимость каждого такого проезда. Составлены два маршрута поездок по городам страны. В каждый из этих маршрутов каждый город входит ровно по одному разу. При составлении первого маршрута руководствовались следующим принципом: начальный пункт маршрута выбрали произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут ещё не прошёл, выбирали тот, поездка в который из предыдущего города имеет наименьшую стоимость (если таких городов несколько, то выбирали любой из них), и так до тех пор, пока не пройдены все города. При составлении второго маршрута начальный город тоже выбрали произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут ещё не прошёл, выбирали тот, поездка в который из предыдущего города имеет наибольшую стоимость. Докажите, что общая стоимость проезда по первому маршруту не больше общей стоимости проезда по второму маршруту, если:

- а) стоимости билетов равны 0 или 1;

Пункт б) далёк от того, чтобы быть разобранным...