Домашнее задание на каникулы.

Новое

1. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. Точки D, E, F выбраны на сторонах BC, CA, AB соответственно так, что DE перпендикулярна CO и DF перпендикулярна BO. Пусть K – центр описанной окружности треугольника AFE. Докажите, что DK и BC перпендикулярны.

2. Треугольник ABC вписан в окружность Ω. Окружность ω касается окружности Ω в точке T и касается отрезков AB и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников TAK, TBK, TAL и TCL, лежат на одной окружности.

3. Найдите все действительные числа t такие, что для любых a, b, c, являющихся сторонами треугольника, $a^2 + bct$, $b^2 + cat$, $c^2 + abt$ тоже являются сторонами треугольника.

4. С острова рыцарей и лжецов прибыло n беженцев. В пути к ним присоединился один террорист. Пограничная охрана хочет вычислить террориста. У них есть комната для допросов, в которую влезает до двух посетителей. Каждому из них разрешается задать вопрос про другого, является ли тот террористом, при этом лжецы всегда лгут, рыцари говорят правду, а террорист говорит что хочет. При каких n можно вычислить террориста, если каждый человек должен побывать в комнате не более одного раза?

5. В прямоугольнике R отметили n точек так, что никакие две не лежат на прямой, параллельной одной из сторон. Прямоугольник R разбили на прямоугольники со сторонами, параллельными сторонам R так, что отмеченные точки лежат на границах маленьких прямоугольников. Докажите, что этих прямоугольников не менее $n + 1$.

6. Пусть $n \geqslant 2$ — целое число. Упорядоченный набор $(a_1, a_2, ..., a_n)$ не обязательно различных положительных целых чисел назовём дорогой n-кой, если существует положительное целое число k такое, что

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \dots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Найдите все целые числа $n \geqslant 2$, для которых существует дорогая n-ка.

b) Докажите, что для каждого нечётного положительного целого числа m существует целое число $n \geqslant 2$ такое, что число m встречается в какой-то дорогой n-ке. В левой части равенства содержится ровно n сомножителей.

Незаслуженно забытое старое.

5-5. Существуют ли три попарно различных ненулевых целых числа, сумма которых равна нулю, а сумма тринадцатых степеней которых является квадратом некоторого натурального числа?

6-7. В стране 2000 городов, любые два соединены самолётом, поездом или пароходом. Для какого наименьшего k гарантированно можно выбрать k городов и один из видов транспорта так, чтобы из любого из этих k городов можно было этим видом транспорта добраться до любого другого?

7-9 (задача с региона). Даны натуральные числа a, b, c, взаимно простые в совокупности. Верно ли, что обязательно существует такое натуральное n, что число $a^k + b^k + c^k$ не делится на 2^n ни при одном натуральном k?

8-10(теперь вы вроде должны такое уметь). Натуральные числа a и b таковы, что число $\dfrac{a^2+b^2+6}{ab}$ — целое. Чему оно может быть равно?

9-8. Пусть $\sigma(n)$ – сумма делителей числа n. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k} \leqslant 2n$$

14-9. Let $\sqrt{3} = 1.b_1b_2b_3\dots_{(2)}$ be the binary representation of $\sqrt{3}$. Prove that for any positive integer n, at least one of the digits b_n, b_{n+1}, $\dots$, b_{2n} equals 1.

16-9. На плоскости даны 2019 прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку. Улитка Турбо сидит в некоторой точке ровно на одной из прямых и начинает ползти по прямым, следуя правилам: она движется по прямой до тех пор, пока не доползёт до точки пересечения прямых. В точке пересечения она продолжает движение по другой прямой, поворачивая поочерёдно направо или налево, меняя выбор направления поворота в следующей точке пересечения прямых. Она может менять направление движения только в точках пересечения прямых. Могло ли оказаться, что по некоторому отрезку она ползла в обоих направлениях во время своего путешествия?