Серия 17. Жемчужины комбинаторики.

Точно было.

1.(9-4) Клетки таблицы $3n \times 3n$ покрашены диагональной раскраской в зелёный, красный и синий цвет. В клетках таблицы расставлены по $3n^2$ фишек зелёного, красного и синего цвета. Известно, что для некоторого d можно так переставить фишки, чтобы каждая фишка переместилась не более, чем на d и каждая зелёная фишка оказалась там, где раньше была красная, каждая красная оказалась там, где раньше была синяя, а каждая синяя оказалась там, где раньше была зелёная. Докажите, что можно переставить фишки так, чтобы каждая фишка переместилась не более, чем на $d+2$ и каждая фишка оказалась в клетке того же цвета.

2(со сборов). Не более 8% жителей государства — враги народа. Известно, что у каждого гражданина этого государства менее 500 знакомых. На день рождения президента каждый гражданин государства сделал ему подарок: написал в Департамент анонимное письмо, разоблачающее одного из знакомых ему врагов народа. При этом известно, что честные граждане разоблачали только истинных врагов, а враги могли как разоблачить других врагов, так и оклеветать честных граждан. Докажите, что на основании полученных данных Департамент может посадить некоторое количество граждан так, чтобы больше половины посаженных была врагами народа.

3(со сборов). Дана последовательность, n-ый член которой есть первая цифра числа 2^n. Рассматриваются 13-значные числа, записанные тринадцатью идущими подряд цифрами этой последовательности. Докажите, что имеется ровно 57 различных чисел такого вида.

Вроде было.

4. Четверть плоскости с положительными координатами разбили на клетки 1×1. В некоторых клетках получившейся доски лежат фишки. Разрешается убрать фишку с клетки, имеющей координаты (i, j) и поставить по фишке в клетки $(i+1, j)$ и $(i, j+1)$, при этом запрещается ставить более одной фишки в клетку. Изначально в трёх левых нижних клетках, образующих уголок, стоит по фишке. Докажите, что такими операциями нельзя добиться того, чтобы они стали пустыми.

5. В клетки таблицы размером $m \times n$ записали различные действительные числа. Пусть $l \leqslant m$, $k \leqslant n$. В каждом столбце подчеркнули l наибольших чисел, а в каждой строке — k наибольших. Докажите, что по крайней мере kl чисел подчёркнуты дважды.

6. На бесконечном белом клетчатом листе бумаги n клеток покрасили в чёрный цвет. Каждую минуту каждая клетка K перекрашивается в цвет, в который покрашено хотя бы две из таких трёх клеток: сама клетка K, соседняя сверху и соседняя слева. Докажите, что не позднее, чем через n минут все клетки станут белыми.

Вроде не было.

7. Рёбра полного графа на n вершинах покрашены в а) 2; б) 3 цвета. Для какого наименьшего n можно утверждать, что найдётся одноцветный треугольник?

8. В некоторой стране из каждого города в другой можно проехать, минуя остальные города. Известна стоимость каждого такого проезда. Составлены два маршрута поездок по городам страны. В каждый из этих маршрутов каждый город входит ровно по одному разу. При составлении первого маршрута руководствовались следующим принципом: начальный пункт маршрута выбрали произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут ещё не прошёл, выбирали тот, поездка в который из предыдущего города имеет наименьшую стоимость (если таких городов несколько, то выбирали любой из них), и так до тех пор, пока не пройдены все города. При составлении второго маршрута начальный город тоже выбрали произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут ещё не прошёл, выбирали тот, поездка в который из предыдущего города имеет наибольшую стоимость. Докажите, что общая стоимость проезда по первому маршруту не больше общей стоимости проезда по второму маршруту, если:
а) стоимости билетов равны 0 или 1;
б) стоимости билетов произвольные.