Серия 16. Геометрический разнобой.

1. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1, а также отмечены середины A_0 и B_0 сторон BC и AC Отрезки A_1B_1 и A_0B_0 пересекаются в точке C'. Докажите, что прямая CC' перпендикулярна прямой, проходящей через ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC.

2. Две окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках C и D. Через точку С проведен отрезок AB так, что C — середина отрезка AB, точка A лежит на S_1, точка B лежит на S_2. Точка P — середина той дуги AD окружности S_1, которая не содержит точку C. Точка Q — середина той дуги BD окружности S_2, которая не содержит точку C. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна прямой CD.

3. Точка D – середина основания AB равнобедренного треугольника ABC. На отрезке AB выбрана произвольная точка E, точка O – центр описанной окружности треугольника ACE. Докажите, что перпендикуляр к DO в точке D, перпендикуляр из точки E к прямой BC и прямая, проходящая через B и параллельная AC пересекаются в одной точке.

4. В разностороннем остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF. Прямая EF пересекает прямую BC в точке P, а прямая, проведенная через D параллельно EF, пересекает AB и AC в точках Q и R соответственно. Докажите, что одна из точек пересечения описанных окружностей треугольников DEF и PQR лежит на BC.

5. Окружности ω_1 и ω_2 (радиус ω_1 меньше радиуса ω_2) вписаны в угол с вершиной O и пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через O, пересекает ω_1 в точках A_1 и B_1, а ω_2 — в точках A_2 и B_2 так, что B_i лежит на отрезке OA_i. Прямая PA_1 пересекает ω_2 вторично в точке C, а прямая QA_2 пересекает ω_1 вторично в точке D. Докажите, что точки O, C и D лежат на одной прямой.

6. Вписанная окружность треугольника ABC кассается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F, соответственно. Пусть ω, ω_1, ω_2 и ω_3 – описанные окружности ABC, AEF, BDF и CDE, соответственно. Пусть окружности ω и ω_1 пересекаются в точках A и P, окружности ω и ω_2 пересекаются в точках B и Q, ω и ω_3 пересекаются в точках C и R. Докажите, что прямые PD, QE и RF пересекаются в одной точке.

7. На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили точки D и E, соответственно, такие, что $DB = BC = CE$. Прямые CD и BE пересекаются в точке F. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, H — ортоцентр треугольника DEF, а M — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что I, H и M лежат на одной прямой.

Домашнее задание.

8. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Ваня и Гриша играют в игру "Селестия"(начинает Ваня). В стране Селестии n островов, на двух из них есть фабрики. Изначально в стране нет мостов, и Ваня и Гриша по очереди их строят. Каждым ходом игрок строит мост между островами I_1 и I_2 по следующим правилам:
• I_1 и I_2 не должны быть соединены мостом ранее.
• хотя бы один из островов I_1 и I_2 соединён последовательностью мостов с островом с фабрикой (или на нём самом есть фабрика).
Игрок, после хода которого между двумя фабриками появляется путь, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре? (Мосты могут проходить друг над другом).

9. На плоскости даны 2019 прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку. Улитка Турбо сидит в некоторой точке ровно на одной из прямых и начинает ползти по прямым, следуя правилам: она движется по прямой до тех пор, пока не доползёт до точки пересечения прямых. В точке пересечения она продолжает движение по другой прямой, поворачивая поочерёдно направо или налево, меняя выбор направления поворота в следующей точке пересечения прямых. Она может менять направление движения только в точках пересечения прямых. Могло ли оказаться, что по некоторому отрезку она ползла в обоих направлениях во время своего путешествия?

10. Для натурального числа m обозначим через $d(m)$ количество всех его натуральных делителей, а через $\omega(m)$ – количество его различных простых делителей. Пусть k – натуральное число. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, таких что $\omega(n) = k$ и $d(n)$ не делит $d(a^2 + b^2)$ ни при каких натуральных a, b таких, что $a + b = n$.