Серия 7. Ищем многочлены.

1. Найдите все такие пары многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, что $P(x)Q(x) = P(Q(x))$ при любых действительных x .

2. Найдите все такие многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, что

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x - 2)$$

при любых действительных x .

3. Найдите все такие многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, что многочлен

$$(x + 1)P(x - 1) - (x - 1)P(x)$$

является константой.

4. Найдите все такие многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, что

$$P(P(n) + n)$$

является простым числом для бесконечного количества натуральных n .

5. Найдите все такие многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $2^n - 1$ делится на $P(n)$ при всех натуральных n .

6. Найдите все такие многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, что для них существует некоторый многочлен $Q(x)$ с действительными коэффициентами такой, что для всех натуральных n выполнено равенство

$$P(1) + P(2) + \dots + P(n) = P(n)Q(n)$$

7. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?

8. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD , BE и CF , пересекающиеся в точке I . Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BE и CF в точках M и N соответственно. Докажите, что точки A , I , M и N лежат на одной окружности.

9. Даны натуральные числа a , b , c , взаимно простые в совокупности. Верно ли, что обязательно существует такое натуральное n , что число $a^k + b^k + c^k$ не делится на 2^n ни при одном натуральном k ?