Серия 2. Уравнения Пелля. Часть 2.

Напомним основные определения.

Определение. Уравнение вида $x^2 - dy^2 = 1$, где d не является квадратом натурального числа, называется *уравнением Пелля.*

В ближайшей задаче зафиксируем определённое значение d, не являющееся точным квадратом.

Определение. Назовём число вида $a + b\sqrt{d}$, где a и b — целые числа, *хорошим* и *замечательным*, если при этом a и b больше 0. *Нормой* хорошего числа $a + b\sqrt{d}$ назовём выражение $a^2 - db^2$. Норму числа x будем обозначать $N(x)$.

1. а) Докажите, что для любого α одно из чисел α, 2α, $\dots n\alpha$ отличается от целого не более чем на $\frac{1}{n+1}$.
б) **(Теорема Дирихле)** Докажите, что существует бесконечно много таких пар натуральных p и q, что $|\frac{p}{q} - \sqrt{d}| < \frac{1}{q^2}$.
в) Докажите, что для какого-то C существует бесконечно много хороших чисел, модуль нормы которых не превосходит C.
г) Докажите, что для какого-то n существует бесконечно много хороших чисел, норма которых равна n.
д) Докажите, что одно из этих чисел делится на другое.
е) Докажите, что у любого уравнение Пелля есть нетривиальное решение.

2. Найдите все такие пары $k < n$, для которых

$$C_n^{k-1} = 2C_n^k + C_n^{k+1}.$$

3. При каких натуральных n число $3^n - 2$ является точным квадратом?

---

4. Назовем лабиринтом шахматную доску 8×8, где между некоторыми полями вставены перегородки. Если ладья может обойти все поля, не перепрыгивая через перегородки, то лабиринт называется хорошим, иначе - плохим. Каких лабиринтов больше - хороших или плохих?

5. Через точку пересечения высот остроугольного треугольника ABC проходят три окружности, каждая из которых касается одной из сторон треугольника в основании высоты. Докажите, что вторые точки пересечения окружностей являются вершинами треугольника, подобного исходному.

6. Докажите, что многочлен степени n нельзя представить в виде суммы n периодических функций (не обязательно непрерывных).