

Серия 2. Двоичная система исчисления.

Существует всего 10 типов людей:
те, кто знают двоичный код, и те, кто нет.

1. С числом разрешается производить две операции: "увеличить в два раза" и "увеличить на 1". За какое наименьшее число операций можно из числа 0 получить
 - (a) число 100?
 - (b) число n ?
2. В наборе имеются гири массой $1, 2, 4, \dots, 2^k, \dots$, причём среди гирь могут быть одинаковые. На две чашки весов положили гири так, чтобы наступило равновесие. Известно, что на левой чашке все гири различны. Докажите, что на правой чашке не меньше гирь, чем на левой.
3. Докажите, что количество способов представить число в виде суммы нечётных слагаемых равно количеству способов представить в виде суммы различных слагаемых.
4. Докажите, что среди чисел вида $[2^k \sqrt{2}]$ есть бесконечно много составных.
5. **Задача Иосифа Флавия.** n человек выстраиваются по кругу и нумеруются числами от 1 до n . Затем из них исключается каждый второй до тех пор, пока не останется только один человек. Например, если $n = 10$, то порядок исключения таков: 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, так что остается номер 5. Для данного n будем обозначать через $J(n)$ номер последнего оставшегося человека. Докажите, что
 - (a) $J(2n) = 2J(n) - 1$;
 - (b) $J(2n + 1) = 2J(n) + 1$;
 - (c) если $n = (1b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_0)_2$, то $J(n) = (b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_01)_2$.
6. **Последовательность Морса.** Бесконечная последовательность из нулей и единиц

01101001100101101001...

построена по следующему правилу. Сначала написан нуль. Затем делается бесконечное количество шагов. На каждом шаге к уже написанному куску последовательности приписывается новый кусок той же длины, получаемый из него заменой всех нулей единицами, а единиц — нулями.

- (a) Какая цифра стоит на 2018 месте?
- (b) Будет ли эта последовательность, начиная с некоторого места, периодической?
- (c) Докажите, что данная последовательность переходит в себя при замене каждого нуля на комбинацию 01, а каждой единицы — на комбинацию 10.
- (d) Докажите, что ни одно конечно слово из нулей и единиц не встречается в последовательности Морса три раза подряд.
- (e) Как, зная представление числа n в двоичной системе счисления, найти n -й элемент данной последовательности?