

## Серия 29. Инверсия

Inversio — (лат.) переворачивание; перестановка.

**Инверсией** относительно данной окружности с центром в точке  $O$  радиуса  $R$  преобразование плоскости, при котором каждая точка  $A$  переходит в точку  $A'$  такую, что  $\overrightarrow{OA'} = R^2 \frac{\overrightarrow{OA}}{|OA|^2}$ .

**C1.** Прямая, проходящая через  $O$ , переходит в себя.

**C2.** Прямая  $\ell$ , не проходящая через  $O$ , переходит в окружность  $S$ , проходящую через  $O$ .

**C3.** точка  $O'$ , симметричная  $O$  относительно  $\ell$ , переходит в центр окружности  $S$ .

**C4.** обратно, окружность  $S$ , проходящая через  $O$  переходит в прямую  $\ell$ .

**C5.** Окружность, не проходящая через  $O$ , переходит в окружность, не проходящую через  $O$ . Их центры лежат на одном луче с началом в  $O$  (но центр не переходит в центр!).

**З0.** Если  $A'$  и  $B'$  — образы точек  $A$  и  $B$ , то  $|A'B'| = \frac{|AB| \cdot R^2}{|OA| \cdot |OB|}$ .

**З1.** Пусть инверсия с центром  $O$  переводит окружность  $S$  в  $S'$ . Докажите, что точка  $O$  — центр гомотетии, переводящей  $S$  в  $S'$ .

**З2.** Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой, а точка  $P$  — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников  $ABP$ ,  $BCP$ ,  $CAP$  и точка  $P$  лежат на одной окружности.

**З3.** Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Прямая, отличная от  $AB$ , пересекает окружность  $\omega_1$  в точках  $C$  и  $D$ , окружность  $\omega_2$  в точках  $E$  и  $F$ , а прямую  $AB$  — в точке  $P$ , лежащей на отрезке  $AB$ . Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников  $ACE$  и  $BDF$ , проходит через точку  $P$ .

**З4.** При помощи циркуля и линейки постройте окружность,

а) проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности;

б) проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей;

в) касающуюся трех данных окружностей.

**З5.** Данна окружность и точка  $P$  внутри нее, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке  $P$ . Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

**З6.** Треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\omega$ . Переменная прямая, параллельная  $BC$ , пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно и пересекает  $\omega$  в точках  $K$  и  $L$  (где  $D$  лежит между  $K$  и  $E$ ). Окружность  $\gamma_1$  касается отрезков  $KD$ ,  $BD$  и окружности  $\omega$ ; окружность  $\gamma_2$  касается отрезков  $LE$ ,  $CE$  и окружности  $\omega$ . Найдите геометрическое место точек пересечения общих внутренних касательных к окружностям  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .