ЦПМ. Группа 10-2 **28.01.2019**

Серия 27. Очень много геометрии

Геометрии мало не бывает!

Один сельский учитель

1. На стороне BC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны AC за точку C — точка N, причем $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

2. Дан параллелограмм $ABCD$, отличный от ромба. Вписанные окружности треугольников ABC и ADC касаются диагонали AC в точках X и Y. Вписанные окружности треугольников BCD и BAD касаются диагонали BD в точках Z и T. Докажите, что точки X, Y, Z и T являются вершинами прямоугольника.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH. Оказалось, что $AH = BC$. Докажите, что биссектриса угла B, высота, опущенная из вершины A, и прямая, проходящая через точку H и параллельная стороне BC, пересекаются в одной точке.

4. Two circles O_1 and O_2 intersect each other at M and N. The common tangent to two circles nearer to M touch O_1 and O_2 at A and B respectively. Let C and D be the reflection of A and B respectively with respect to M. The circumcircle of the triangle DCM intersect circles O_1 and O_2 respectively at points E and F (both distinct from M). Show that the circumcircles of triangles MEF and NEF have same radius length.

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки K и L соответственно так, что $KB = LC$. Точка X симметрична K относительно середины стороны AC, а точка Y симметрична L относительно стороны AB. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла A, делит отрезок XY пополам.

6. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, в котором $\angle B = \angle D$, а центр описанной окружности треугольника ABC, ортоцентр треугольника ADC и точка B лежат на одной прямой. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

7. AE и CD — высоты остроугольного треугольника ABC. Биссектриса угла B пересекает отрезок DE в точке F. На отрезках AE и CD взяли такие точки P и Q соответственно, что четырёхугольники $ADFQ$ и $CEFP$ — вписанные. Докажите, что $AP = CQ$.

8. Let ω be the circumcircle of a triangle ABC. Denote by M and N the midpoints of the sides AB and AC, respectively, and denote by T the midpoint of the arc BC of ω not containing A. The circumcircles of the triangles AMT and ANT intersect the perpendicular bisectors of AC and AB at points X and Y, respectively; assume that X and Y lie inside the triangle ABC. The lines MN and XY intersect at K. Prove that $KA = KT$.