

Серия 26. Немного уравнений

1. Пусть x — корень уравнения $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Докажите, что x^2 — иррациональное число.

2. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$ и геометрическая прогрессия q_1, q_2, q_3, q_4 , все члены которой различны. Может ли оказаться так, что $f(q_1) = q_2, f(q_2) = q_3, f(q_3) = q_4$?

3. Многочлен третьей степени с целыми коэффициентами имеет три положительных иррациональных корня. Докажите, что они не могут образовывать геометрическую прогрессию.

4. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. Всегда ли можно найти такой многочлен четвёртой степени $g(x)$, что уравнение $f(g(x)) = 0$ не имеет решений?

5. Числа a и $a^3 - 6a$ — различные корни квадратного уравнения с целыми коэффициентами. При этом число a иррационально. Чему может быть равно a ?

6. Докажите, что система уравнений
$$\begin{cases} x^3 - ax^2 + b^3 = 0, \\ x^3 - bx^2 + c^3 = 0, \\ x^3 - cx^2 + a^3 = 0. \end{cases}$$
 не имеет вещественных решений, если числа a, b, c различны.

7. Вещественные числа a, b, c таковы, что среди трёх уравнений

$$x^3 - ax^2 + b = 0, \quad x^3 - bx^2 + c = 0, \quad x^3 - cx^2 + a = 0$$

любые два имеют общий корень. Докажите, что $a = b = c$.

8. Найдите все такие целые числа b , для которых уравнение $[x^2] - 2012x + b = 0$ имеет нечётное число корней.

9. Для многочлена $p(x, y)$ с вещественными коэффициентами нашлась такая функция $f(x)$, что

$$p(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y)$$

для всех вещественных x, y . Докажите, что в качестве f можно взять некоторый многочлен.