

Ego plus quam feci, facere non possum

## Алгебраический разнобой

1. Существует ли такое натуральное  $k$ , что сто последних цифр числа  $2101^k$  совпадают с ста последними цифрами числа  $2007^k$ ?

2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел  $n$ , для которых  $2^n + n^2$  кратно 100.

3. Даны вещественные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ . Докажите неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

4. Про вещественные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  известно, что  $a_1^2 \geq a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$ . Докажите неравенство

$$(a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)^2 \geq (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2).$$

5. Решите в целых числах уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 = 6xyz$ .

6. При каких натуральных  $n$  число  $4^n + 6^n + 9^n$  является точным квадратом?

7. Найдите все пары натуральных чисел  $x$  и  $y$ , для которых  $xy^2 + 7$  делится на  $x^2y + x$ .

8. Найдите наименьшее натуральное  $a$ , для которого неравенство  $(n!)^2 \cdot a^n > (2n)!$  справедливо при всех натуральных  $n$ .

9. Пусть  $p$  — простое число. Определим последовательность  $\{a_n\}$  как  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{k+2} = 2a_{k+1} - pa_k$ . Найдите все возможные значения  $p$ , если известно, что один из членов последовательности равен  $-1$ .

Ego plus quam feci, facere non possum

## Алгебраический разнобой

1. Существует ли такое натуральное  $k$ , что сто последних цифр числа  $2101^k$  совпадают с ста последними цифрами числа  $2007^k$ ?

2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел  $n$ , для которых  $2^n + n^2$  кратно 100.

3. Даны вещественные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ . Докажите неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

4. Про вещественные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  известно, что  $a_1^2 \geq a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$ . Докажите неравенство

$$(a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)^2 \geq (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2).$$

5. Решите в целых числах уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 = 6xyz$ .

6. При каких натуральных  $n$  число  $4^n + 6^n + 9^n$  является точным квадратом?

7. Найдите все пары натуральных чисел  $x$  и  $y$ , для которых  $xy^2 + 7$  делится на  $x^2y + x$ .

8. Найдите наименьшее натуральное  $a$ , для которого неравенство  $(n!)^2 \cdot a^n > (2n)!$  справедливо при всех натуральных  $n$ .

9. Пусть  $p$  — простое число. Определим последовательность  $\{a_n\}$  как  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{k+2} = 2a_{k+1} - pa_k$ . Найдите все возможные значения  $p$ , если известно, что один из членов последовательности равен  $-1$ .