Серия 12. Разностные многочлены

Sapere aude

1. а) Дан многочлен $P(x)$ степени n. Какая может быть степень у многочлена $P(x+1)-P(x)$?
б) А какая может быть степень у многочлена $P(x+2,018)-P(x)$?
в) Докажите, что многочлен степени n не может быть представлен в виде суммы n периодических функций?

Обозначение. Для функции f обозначим $\Delta f = (\Delta f)(x) = f(x+1)-f(x)$.

2. Докажите, что для всякого многочлена $Q(x)$ существует единственный с точностью до прибавления константы многочлен $P(x)$ такой, что $Q = \Delta P$.

3. Запишите короткой формулой многочлен ΔC_x^k.

4. Докажите, что для любого натурального k сумма

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k$$

является многочленом от n. Какая у него степень? Какой старший коэффициент?

5. Найдите $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$.

6. Для каких k верен следующий факт: для любого натурального n число

$$k\frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5}{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}$$

является целым?

7. а) Напишите формулу для $\Delta\Delta\Delta P$.
б) Докажите, что всякое рациональное число является суммой кубов четырёх рациональных чисел.
в) Докажите, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов различных целых чисел.

8. Дано натуральное число k. Для каждого натурального n обозначим $f(n)$ наименьшее значение выражения $\left|\pm 1^k \pm 2^k \pm \ldots \pm n^k\right|$ по всем расстановкам знаков. Докажите, что функция $f(n)$ периодична, начиная с некоторого места.

Дубов.рф

ЦПМ. Группа 10-2 **08.11.2018**

Серия 12. Разностные многочлены

Sapere aude

1. а) Дан многочлен $P(x)$ степени n. Какая может быть степень у многочлена $P(x+1)-P(x)$?
б) А какая может быть степень у многочлена $P(x+2,018)-P(x)$?
в) Докажите, что многочлен степени n не может быть представлен в виде суммы n периодических функций?

Обозначение. Для функции f обозначим $\Delta f = (\Delta f)(x) = f(x+1)-f(x)$.

2. Докажите, что для всякого многочлена $Q(x)$ существует единственный с точностью до прибавления константы многочлен $P(x)$ такой, что $Q = \Delta P$.

3. Запишите короткой формулой многочлен ΔC_x^k.

4. Докажите, что для любого натурального k сумма

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k$$

является многочленом от n. Какая у него степень? Какой старший коэффициент?

5. Найдите $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$.

6. Для каких k верен следующий факт: для любого натурального n число

$$k\frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5}{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}$$

является целым?

7. а) Напишите формулу для $\Delta\Delta\Delta P$.
б) Докажите, что всякое рациональное число является суммой кубов четырёх рациональных чисел.
в) Докажите, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов различных целых чисел.

8. Дано натуральное число k. Для каждого натурального n обозначим $f(n)$ наименьшее значение выражения $\left|\pm 1^k \pm 2^k \pm \ldots \pm n^k\right|$ по всем расстановкам знаков. Докажите, что функция $f(n)$ периодична, начиная с некоторого места.