

Многочлены

1. Докажите, что при любых отличных от нуля числах a, b, c хотя бы одно из квадратных уравнений $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$ имеет корень.
2. Найдите коэффициент при x^2 многочлена $P = (1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+2101x)$.
3. Докажите, что многочлен $3x^{2018} + 4$ нельзя представить в виде суммы трёх квадратов многочленов с целыми коэффициентами.
4. Многочлен $x^2 + ax + b + 1$ с целыми коэффициентами имеет два натуральных корня. Докажите, что число $a^2 + b^2$ — составное.
5. Действительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$ и $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел равно 1.
6. Пусть $P(x)$ — квадратный трехчлен с действительными коэффициентами такой, что $P(x^3 + x) \geq P(x^2 + 1)$ для всех действительных x . Найдите сумму корней $P(x)$.
7. Даны действительные числа $a_1, \dots, a_{2016}$. Пусть уравнение

$$x^{2019} - 2019x^{2018} + a_{2017}x^{2017} + \dots + a_2x^2 + a_1x + 1 = 0$$

имеет 2019 положительных действительных решений. Найдите максимальное значение a_1 .

8. Дан многочлен $P(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + \dots - x + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите остаток при делении многочлена $P(x^{2n+1})$ на $P(x)$.

9. Найдите все пары $(p; q)$, при которых уравнение $x^4 + 2px^2 + qx + p^2 - 36 = 0$ имеет 4 целых корня (включая кратные).

10. Пусть многочлен $P(x)$ имеет n различных корней $x_1, x_2, \dots, x_n$. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^n}{P'(x_k)} = \sum_{k=1}^n x_k.$$