Кружок в хамовниках. группа 10-2

Серия 17. Инвариант

1. 100 фишек выставлены в ряд.

   (a) Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

   (b) Пусть теперь разрешено менять фишки, стоящие через две. Можно ли тогда переставить фишки в обратном порядке?

2. На доске по кругу написаны четыре числа 2, 0, 1, 7. Раз в минуту Петя одновременно записывает между каждыми двумя соседними числами a и b число $a-b$, если a больше b, и $10+a-b$ в противном случае. Чему будет равна последняя цифра суммы чисел на доске через 2 часа?

3. На доске написаны числа $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. За ход можно выбрать пару чисел a и b, и заменить их на $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Можно ли получить в итоге тройку чисел $1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$?

4. В клетчатом квадрате $n \times n$ одна угловая клетка белая, а все остальные -— черные. Разрешается взять любую строку или столбец квадрата и поменять в ней цвет каждой клетки. Можно ли такими операциями перекрасить все клетки квадрата в белый, если

   (a) n чётно

   (b) n нечётно

   (c) Пусть $n \geqslant 4$, но закрашена не угловая клетка, а соседняя с ней. При этом дополнительно можно перекрашивать любые диагонали (не только главные).

5. Имеется таблица $n \times n$, в $n-1$ клетках которой записаны единицы, а в остальных клетках —- нули. Разрешается проделывать следующую операцию: выбрать клетку, вычесть из числа, стоящего в этой клетке, единицу, а ко всем числам в её столбце и строке прибавить единицу. Можно ли при каком-нибудь $n > 1$ из этой таблицы получить таблицу, в которой все числа равны?

6. В правильном десятиугольнике проведены все диагонали. Возле каждой вершины и возле каждой точки пересечения диагоналей поставлено число $+1$ (рассматриваются только сами диагонали, а не их продолжения). Разрешается одновременно изменить все знаки у чисел, стоящих на одной стороне или на одной диагонали. Можно ли с помощью нескольких таких операций изменить все знаки на противоположные?

7. На доске написаны 100 чисел $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа (a, b) и записать вместо них на доску одно число $ab+a+b$. Каким может быть результат на доске после 99 действий?

8. На доске написаны 100 чисел $1, 2, \ldots, 100$. Разрешается стереть любые два числа (a, b) и записать вместо них на доску одно число $\frac{ab}{a+b+1}$. Каким может быть результат на доске после 99 действий?

9. В одной из вершин n-угольника лежит одна монета, в остальных ничего не лежит. За один ход можно убрать монету из одной из вершин и добавить 6 монет в соседнюю с ней вершину. При каких n можно добиться того, чтобы во всех вершинах было поровну монет?

   (a) $n = 2018$

   (b) $n = 2015$

   (c) n - натуральное число.