

Серия 38. Комбинаторная геометрия. Принцип крайнего

1. Докажите, что если длины всех сторон треугольника меньше 1, то его площадь меньше $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
2. В некоторой стране 100 аэродромов, причём все попарные расстояния между ними различны. С каждого аэродрома поднимается самолёт и летит на ближайший к нему аэродром. Докажите, что ни на один аэродром не может прилететь больше 5 самолётов.
3. На плоскости расположено несколько точек, все попарные расстояния между которыми различны. Каждую из этих точек соединяют с ближайшей. Может ли при этом получиться замкнутая ломаная?
4. Из каждой вершины многоугольника опущены перпендикуляры на стороны, её не содержащие. Докажите, что хотя бы для одной вершины одно из её оснований перпендикуляров лежит на самой стороне, а не на её продолжении.
5. Можно ли на плоскости расположить 2019 отрезков так, чтобы каждый отрезок обоими концами упирался строго внутрь других отрезков?
6. На плоскости дано 2019 точек, причём не все они лежат на одной прямой. Докажите, что существует окружность, проходящая через хотя бы 3 из данных точек и не содержащая внутри ни одной из оставшихся точек.
7. На плоскости дано конечное множество многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, имеющая общие точки со всеми этими многоугольниками.
8. Докажите, что многоугольник нельзя покрыть двумя многоугольниками, гомотетичными ему с коэффициентом 0,99 (поворачивать фигуры нельзя).
9. Кубическая коробка заполнена кубами без пустых мест. Докажите, что не все кубы разные.