

Серия 32. Инверсная добавка

ИНВЕРСИЯ — нарушение принятого в разговорной речи порядка слов и, тем самым, обычной интонации

Литературная энциклопедия

1. Докажите, что инверсия сохраняет углы между окружностями (в этой задаче прямые мы тоже будем считать окружностями).

2 (неравенство Птолемея). Для выпуклого четырёхугольника $ABCD$ докажите неравенство

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD.$$

Когда достигается равенство? *Сделайте инверсию с центром в точке A . Или B .*

3 (лемма Архимеда). В окружности Ω проведена хорда AB . Окружность ω касается Ω в точке P и AB в точке Q ; M — середина дуги AB . Докажите, что P , Q и M лежат на одной прямой.

4 (продолжение). В обозначениях предыдущей задачи докажите, что касательная из точки M к ω равна MA .

5. На окружности расположены точки A, B, C, D . Обозначим через K середину дуги AB , не содержащую точек C и D . Прямые CK и DK пересекают прямую AB в точках M и N . Докажите, что точки M, N, C и D лежат на одной окружности

6 (поризм Штейнера). Рассмотрим цепочку окружностей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, каждая из которых касается двух соседних (ω_n касается ω_{n+1} и ω_{n-1}) и двух данных непересекающихся окружностей Ω_1 и Ω_2 . Тогда для любой окружности θ_1 , касающейся Ω_1 и Ω_2 (одинаковым образом) существует аналогичная цепочка из n касающихся окружностей $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$.

Серия 32. Инверсная добавка

ИНВЕРСИЯ — нарушение принятого в разговорной речи порядка слов и, тем самым, обычной интонации

Литературная энциклопедия

1. Докажите, что инверсия сохраняет углы между окружностями (в этой задаче прямые мы тоже будем считать окружностями).

2 (неравенство Птолемея). Для выпуклого четырёхугольника $ABCD$ докажите неравенство

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD.$$

Когда достигается равенство? *Сделайте инверсию с центром в точке A . Или B .*

3 (лемма Архимеда). В окружности Ω проведена хорда AB . Окружность ω касается Ω в точке P и AB в точке Q ; M — середина дуги AB . Докажите, что P , Q и M лежат на одной прямой.

4 (продолжение). В обозначениях предыдущей задачи докажите, что касательная из точки M к ω равна MA .

5. На окружности расположены точки A, B, C, D . Обозначим через K середину дуги AB , не содержащую точек C и D . Прямые CK и DK пересекают прямую AB в точках M и N . Докажите, что точки M, N, C и D лежат на одной окружности

6 (поризм Штейнера). Рассмотрим цепочку окружностей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, каждая из которых касается двух соседних (ω_n касается ω_{n+1} и ω_{n-1}) и двух данных непересекающихся окружностей Ω_1 и Ω_2 . Тогда для любой окружности θ_1 , касающейся Ω_1 и Ω_2 (одинаковым образом) существует аналогичная цепочка из n касающихся окружностей $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$.