

Серия 33. Графы

1. В школе 300 учеников, при этом каждая девочка дружит хотя бы с тремя мальчиками, а каждый мальчик — хотя бы с одним мальчиком. В среднем у человека ровно 3 друга. Какое наибольшее количество девочек может быть в школе?
2. В графе 2019 вершин, степень каждой из которых не меньше 3. Обозначим за C количество вершин в наибольшем простом цикле. Какое минимальное значение может принимать C ?
3. В графе 2019 вершин, при этом любой простой цикл состоит ровно из 3 рёбер. Какое наибольшее количество рёбер может быть в этом графе?
4. В чемпионате страны Лилипутов по баскетболу участвовали $2n$ команд. Турнир прошёл за $2n - 1$ тур, в каждом туре команды играли по одному матчу. В итоге каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. После того, как все туры прошли Центр Предвзятого Мнения за каждый тур назначил одну из команд, выигравшей свой матч в этот тур, лучшей командой тура. Назовём команду неудачливой, если она единственная из всех ни разу не стала лучшей командой тура. Назовём команду потенциально неудачливой, если Центр Предвзятого Мнения может сделать её неудачливой. Докажите, что хотя бы одна потенциально неудачливая команда есть.
5. В королевстве 100 городов, при этом каждый город соединён дорогами не менее, чем с 89 другими городами. Король хочет назначить несколько городов столицами так, чтобы каждый из оставшихся городов был соединен хотя бы с одной столицей. Каким минимальным количеством столиц гарантированно можно обойтись?
6. а). Для обороны архипелага из 300 островов герцог хочет соединить некоторые острова мостами. Известно, что противник сможет подорвать либо один мост, либо два моста, которые не ведут к одному и тому же острову. Какое наименьшее количество мостов должен построить герцог, чтобы после действий противника можно было от любого острова добраться по мостам до любого другого? (Каждый мост соединяет два острова; два острова могут быть соединены не более чем одним мостом; мосты могут проходить друг над другом).
б). Не успел герцог начать строительство, как ему донесли, что у противника появилась ещё одна возможность: подорвать три моста, никакие два из которых не ведут к одному острову. Какое наименьшее количество мостов нужно построить теперь?

Рубрика “Домашнее задание”.

7. Назовём натуральное число n *невероятным*, если оно представляется в виде $n = a^b + b$ для каких-то натуральных чисел $a, b > 1$. Существуют ли 2000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 1000 — невероятные?
8. Пусть k — некоторое натуральное число. Биекция $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ такова, что из того, что $|i - j| \leq k$ следует, что $|f(i) - f(j)| \leq k$. Докажите, что для всех i, j верно, что $|f(i) - f(j)| = |i - j|$.