1. Пусть A и B — две различные точки плоскости, $\lambda \in \mathbb{R}$.

а) Докажите, что на прямой AB найдется единственная точка X такая, что $AX^2 - BX^2 = \lambda$.

б) Докажите, что ГМТ плоскости X таких, что $AX^2 - BX^2 = \lambda$, является прямая, перпендикулярная AB.

2. а) Радикальная ось. Пусть ω_1 и ω_2 — неконцентрические окружности. Докажите, что ГМТ X таких, что $\deg(X, \omega_1) = \deg(X, \omega_2)$, является прямая, перпендикулярная линии центров ω_1 и ω_2.

б) Радикальный центр. Пусть ω_1, ω_2 и ω_3 — попарно неконцентрические окружности. Докажите, что радикальные оси ω_1 и ω_2, ω_2 и ω_3, ω_3 и ω_1 пересекаются в одной точке или попарно параллельны.

3. Даны концентрические окружности ω и Ω, причем ω внутри Ω. Из точки $A \in \Omega$ проведены касательные AB, AC к ω. Окружность с центром A и радиусом AB пересекает Ω в точках M и N. Докажите, что прямая MN содержит среднюю линию треугольника ABC.

4. Окружность, проходящая через вершины B и C трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали — в точках M и N. Докажите, что прямые AD, PQ и MN пересекаются в одной точке или параллельны.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L, M — середины отрезков AB, CD, AC соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A на прямую BC, пересекается с перпендикуляром, опущенным из C на прямую AD, в точке F. Докажите, что $MF \perp KL$.

6. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.

7. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, AC, BC в точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Докажите, что средние линии треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1, параллельные сторонам A_1B_1 и A_1C_1, а также серединный перпендикуляр к BC пересекаются в одной точке.

8. В остроугольном треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно, H — основание высоты, опущенной из вершины B. Описанные окружности треугольников AHN и CHM пересекаются в точках P и H. Докажите, что прямая PH проходит через середину отрезка MN.

9. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что точки пересечения пар прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой, соединяющей ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC.

10. AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC с ортоцентром H. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $KH \perp CM$, где M — середина AB.

8 класс Радикальная ось 30 марта 2019

1. Пусть A и B — две различные точки плоскости, $\lambda \in \mathbb{R}$.

а) Докажите, что на прямой AB найдется единственная точка X такая, что $AX^2 - BX^2 = \lambda$.

б) Докажите, что ГМТ плоскости X таких, что $AX^2 - BX^2 = \lambda$, является прямая, перпендикулярная AB.

2. а) Радикальная ось. Пусть ω_1 и ω_2 — неконцентрические окружности. Докажите, что ГМТ X таких, что $\deg(X, \omega_1) = \deg(X, \omega_2)$, является прямая, перпендикулярная линии центров ω_1 и ω_2.

б) Радикальный центр. Пусть ω_1, ω_2 и ω_3 — попарно неконцентрические окружности. Докажите, что радикальные оси ω_1 и ω_2, ω_2 и ω_3, ω_3 и ω_1 пересекаются в одной точке или попарно параллельны.

3. Даны концентрические окружности ω и Ω, причем ω внутри Ω. Из точки $A \in \Omega$ проведены касательные AB, AC к ω. Окружность с центром A и радиусом AB пересекает Ω в точках M и N. Докажите, что прямая MN содержит среднюю линию треугольника ABC.

4. Окружность, проходящая через вершины B и C трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали — в точках M и N. Докажите, что прямые AD, PQ и MN пересекаются в одной точке или параллельны.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L, M — середины отрезков AB, CD, AC соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A на прямую BC, пересекается с перпендикуляром, опущенным из C на прямую AD, в точке F. Докажите, что $MF \perp KL$.

6. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.

7. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, AC, BC в точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Докажите, что средние линии треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1, параллельные сторонам A_1B_1 и A_1C_1, а также серединный перпендикуляр к BC пересекаются в одной точке.

8. В остроугольном треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно, H — основание высоты, опущенной из вершины B. Описанные окружности треугольников AHN и CHM пересекаются в точках P и H. Докажите, что прямая PH проходит через середину отрезка MN.

9. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что точки пересечения пар прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой, соединяющей ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC.

10. AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC с ортоцентром H. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $KH \perp CM$, где M — середина AB.