

Определение. Граф — *двудольный*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы любое ребро соединяло вершины разных цветов.

1. Докажите, что дерево является двудольным графом.

2. В чемпионате России по футболу играют 16 команд. Прошли два первых тура, каждая команда сыграла в каждом из них по одной игре. Докажите, что найдутся 8 команд, никакие две из которых не играли друг с другом.

3. Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда все циклы в нём имеют чётную длину.

4. а) Докажите, что следующий граф — двудольный.

Вершины графа — расстановки пары фишек на шахматной доске. Две расстановки соединены ребром, если позиции получаются друг из друга ходом фишки на одну клетку по вертикали или горизонтали.

б) На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Фишки ходили, пока не прошли все возможные позиции. Докажите, что какая-то позиция встретилась не менее двух раз.

5. На плоскости даны 2019 точек. Двое по очереди соединяют эти точки отрезками, причем один отрезок нельзя проводить дважды. Проигрывает тот, после хода которого впервые образуется замкнутая ломаная с нечетным числом звеньев. Кто выиграет при правильной игре?

6. При каких m и n граф $K_{m,n}$ (т.е. полный двудольный граф, в одной доле которого m , а в другой — n вершин) является планарным?

7. В классе 20 человек. Каждый день либо ровно один ученик заболевает, либо ровно один выздоравливает (дети школу не прогуливают), а если в классе остается менее 4 здоровых детей, то уроки отменяются. Могло ли так оказаться, что уроки не отменялись, а в классе присутствовали по разу все возможные наборы из не менее, чем 4 детей?

8. Денис записал в каждой вершине связного графа число. Потом пришёл Стёпа, записал на каждом ребре сумму чисел в вершинах и стёр числа Дениса. Для каких графов Антон гарантированно сможет восстановить числа, написанные Денисом?

9. В деревне Хамовники у каждого мальчика все знакомые с ним девочки знакомы между собой. У каждой девочки среди её знакомых мальчиков больше, чем девочек. Докажите, что в Хамовниках мальчиков живёт не меньше, чем девочек.

Определение. Граф — *двудольный*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы любое ребро соединяло вершины разных цветов.

1. Докажите, что дерево является двудольным графом.

2. В чемпионате России по футболу играют 16 команд. Прошли два первых тура, каждая команда сыграла в каждом из них по одной игре. Докажите, что найдутся 8 команд, никакие две из которых не играли друг с другом.

3. Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда все циклы в нём имеют чётную длину.

4. а) Докажите, что следующий граф — двудольный.

Вершины графа — расстановки пары фишек на шахматной доске. Две расстановки соединены ребром, если позиции получаются друг из друга ходом фишки на одну клетку по вертикали или горизонтали.

б) На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Фишки ходили, пока не прошли все возможные позиции. Докажите, что какая-то позиция встретилась не менее двух раз.

5. На плоскости даны 2019 точек. Двое по очереди соединяют эти точки отрезками, причем один отрезок нельзя проводить дважды. Проигрывает тот, после хода которого впервые образуется замкнутая ломаная с нечетным числом звеньев. Кто выиграет при правильной игре?

6. При каких m и n граф $K_{m,n}$ (т.е. полный двудольный граф, в одной доле которого m , а в другой — n вершин) является планарным?

7. В классе 20 человек. Каждый день либо ровно один ученик заболевает, либо ровно один выздоравливает (дети школу не прогуливают), а если в классе остается менее 4 здоровых детей, то уроки отменяются. Могло ли так оказаться, что уроки не отменялись, а в классе присутствовали по разу все возможные наборы из не менее, чем 4 детей?

8. Денис записал в каждой вершине связного графа число. Потом пришёл Стёпа, записал на каждом ребре сумму чисел в вершинах и стёр числа Дениса. Для каких графов Антон гарантированно сможет восстановить числа, написанные Денисом?

9. В деревне Хамовники у каждого мальчика все знакомые с ним девочки знакомы между собой. У каждой девочки среди её знакомых мальчиков больше, чем девочек. Докажите, что в Хамовниках мальчиков живёт не меньше, чем девочек.