8 класс **Разнобой** 26 января 2019

1. Назовём натуральное число *интересным*, если сумма его цифр — простое число. Какое наибольшее количество интересных чисел может быть среди пяти подряд идущих натуральных чисел?

2. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества натуральных чисел.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH. Перпендикуляр, восстановленный в точке M к прямой AM, пересекает луч HB в точке K. Докажите, что если $\angle MAC = 30^\circ$, то $AK = BC$.

4. Можно ли на окружности длины 90 отметить 10 точек так, чтобы среди дуг с концами в этих точках имелись дуги со всеми целочисленными длинами от 1 до 89?

5. а) Все клетки таблицы 100×100 пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до 10000. Никита смотрит на таблицу и закрашивает N клеток по своему выбору. Далее каждым своим ходом он может закрасить любую клетку таблицы, если в одной строке или одном столбце с ней есть закрашенная клетка с меньшим номером. При каком наименьшем N Никита независимо от исходной нумерации сможет за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?

б) Тот же вопрос, но теперь Никита может закрасить любую клетку таблицы, либо если в одной строке с ней есть закрашенная клетка с меньшим номером, либо если в одном столбце с ней есть закрашенная клетка с большим номером.

6. О выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle DAB = 90^\circ$, а также $\angle ADC = \angle BAM$, где M — середина стороны BC. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$.

7. Числа x, y, z таковы, что $x^2+y^2+z^2=1$. Докажите, что

$$(x-y)(y-z)(x-z) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

8. На стол положили 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом было ровно 43 карточки с нечётными числами. Затем каждую минуту проводилась следующая процедура. Для каждых трёх карточек, лежащих на столе, вычислялось произведение записанных на них чисел, все эти произведения складывались, и полученное число записывалось на новую карточку, которая добавлялась к лежащим на столе. Через год после начала процесса выяснилось, что на столе есть карточка с числом, делящимся на 2^{10000}. Докажите, что число, делящееся на 2^{10000}, было на одной из карточек уже через день после начала.

8 класс **Разнобой** 26 января 2019

1. Назовём натуральное число *интересным*, если сумма его цифр — простое число. Какое наибольшее количество интересных чисел может быть среди пяти подряд идущих натуральных чисел?

2. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества натуральных чисел.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH. Перпендикуляр, восстановленный в точке M к прямой AM, пересекает луч HB в точке K. Докажите, что если $\angle MAC = 30^\circ$, то $AK = BC$.

4. Можно ли на окружности длины 90 отметить 10 точек так, чтобы среди дуг с концами в этих точках имелись дуги со всеми целочисленными длинами от 1 до 89?

5. а) Все клетки таблицы 100×100 пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до 10000. Никита смотрит на таблицу и закрашивает N клеток по своему выбору. Далее каждым своим ходом он может закрасить любую клетку таблицы, если в одной строке или одном столбце с ней есть закрашенная клетка с меньшим номером. При каком наименьшем N Никита независимо от исходной нумерации сможет за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?

б) Тот же вопрос, но теперь Никита может закрасить любую клетку таблицы, либо если в одной строке с ней есть закрашенная клетка с меньшим номером, либо если в одном столбце с ней есть закрашенная клетка с большим номером.

6. О выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle DAB = 90^\circ$, а также $\angle ADC = \angle BAM$, где M — середина стороны BC. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$.

7. Числа x, y, z таковы, что $x^2+y^2+z^2=1$. Докажите, что

$$(x-y)(y-z)(x-z) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

8. На стол положили 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом было ровно 43 карточки с нечётными числами. Затем каждую минуту проводилась следующая процедура. Для каждых трёх карточек, лежащих на столе, вычислялось произведение записанных на них чисел, все эти произведения складывались, и полученное число записывалось на новую карточку, которая добавлялась к лежащим на столе. Через год после начала процесса выяснилось, что на столе есть карточка с числом, делящимся на 2^{10000}. Докажите, что число, делящееся на 2^{10000}, было на одной из карточек уже через день после начала.