

Определение. Пусть имеется n предметов, k из них одного вида, а $n - k$ другого. Число различных способов выложить их в ряд обозначается C_n^k .

1. Придумайте комбинаторные доказательства тождеств

$$C_n^k = C_n^{n-k}; \quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k; \quad C_n^k \cdot C_k^{m-m} = C_n^m \cdot C_m^{n-k}.$$

2. а) Докажите равенство $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

б) Докажите, что $\frac{(d_1 + d_2 + \dots + d_m)!}{d_1!d_2!\dots d_m!}$ — целое число.

в) Для натурального n докажите, что $C_{2n}^m : n + 1$.

3. Найдите суммы (а) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$; (б) $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n$.

4. В клетчатом квадрате $(n+1) \times (n+1)$ строки и столбцы пронумерованы числами $0, 1, \dots, n$. Рассмотрим пути из клетки $(0, 0)$ в клетку (n, n) , идущие только вверх и вправо и не поднимающиеся выше диагонали квадрата. Такие пути называются *путями Дика*. Количество таких путей обозначается C_n и называется n -м *числом Каталана*.

а) Последовательность из n открывающихся и n закрывающихся скобок называется *правильной скобочной последовательностью*, если в любом её начальном куске открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся. Постройте биекцию между путями Дика и правильными скобочными последовательностями.

б) Постройте биекцию между путями Дика и разбиениями выпуклого $(n+2)$ -угольника диагоналями на треугольники.

в) Докажите, что число путей из $(0, 0)$ в (n, n) , которые поднимаются выше диагонали, равно числу всех путей из $(0, 0)$ в $(n-1, n+1)$. Выведите отсюда формулу для n -го числа Каталана.

5. Найдите сумму $C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \dots + C_n^n C_n^0$.

6. а) В классе n ребят. Учитель хочет отправить на олимпиаду команду произвольного размера, один из членов которой был бы капитаном. Из скольких вариантов ему нужно выбирать?

б) Найдите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$.

Определение. Пусть имеется n предметов, k из них одного вида, а $n - k$ другого. Число различных способов выложить их в ряд обозначается C_n^k .

1. Придумайте комбинаторные доказательства тождеств

$$C_n^k = C_n^{n-k}; \quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k; \quad C_n^k \cdot C_k^{m-m} = C_n^m \cdot C_m^{n-k}.$$

2. а) Докажите равенство $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

б) Докажите, что $\frac{(d_1 + d_2 + \dots + d_m)!}{d_1!d_2!\dots d_m!}$ — целое число.

в) Для натурального n докажите, что $C_{2n}^m : n + 1$.

3. Найдите суммы (а) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$; (б) $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n$.

4. В клетчатом квадрате $(n+1) \times (n+1)$ строки и столбцы пронумерованы числами $0, 1, \dots, n$. Рассмотрим пути из клетки $(0, 0)$ в клетку (n, n) , идущие только вверх и вправо и не поднимающиеся выше диагонали квадрата. Такие пути называются *путями Дика*. Количество таких путей обозначается C_n и называется n -м *числом Каталана*.

а) Последовательность из n открывающихся и n закрывающихся скобок называется *правильной скобочной последовательностью*, если в любом её начальном куске открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся. Постройте биекцию между путями Дика и правильными скобочными последовательностями.

б) Постройте биекцию между путями Дика и разбиениями выпуклого $(n+2)$ -угольника диагоналями на треугольники.

в) Докажите, что число путей из $(0, 0)$ в (n, n) , которые поднимаются выше диагонали, равно числу всех путей из $(0, 0)$ в $(n-1, n+1)$. Выведите отсюда формулу для n -го числа Каталана.

5. Найдите сумму $C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \dots + C_n^n C_n^0$.

6. а) В классе n ребят. Учитель хочет отправить на олимпиаду команду произвольного размера, один из членов которой был бы капитаном. Из скольких вариантов ему нужно выбирать?

б) Найдите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$.