

1. Докажите, что в неравностороннем треугольнике ABC точка пересечения серединного перпендикуляра к BC и биссектрисы угла A лежит на описанной окружности.

2. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Точки I_a, I_b, I_c — центры внеписанных окружностей, касающихся сторон BC, CA и AB соответственно. Точка W — середина дуги AC описанной окружности треугольника ABC , не содержащей B , а V — середина дуги AC описанной окружности треугольника ABC , содержащей B .

а) **Лемма о трезубце.** Докажите, что $WA = WC = WI = WI_b$.

б) **Внешняя лемма о трезубце.** Докажите, что $VA = VC = VI_c = VI_a$.

3. **Лемма об отражении ортоцентра.** Докажите, что точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно а) стороны; б) середины стороны, лежит на его описанной окружности.

4. а) **Окружность Эйлера (окружность девяти точек).** Докажите, что в треугольнике середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины и ортоцентр, лежат на одной окружности.

б) Докажите, что центр окружности Эйлера лежит в середине отрезка, концами которого являются ортоцентр и центр описанной окружности треугольника.

5. а) Точки H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC соответственно. Докажите, что длина отрезка BH вдвое больше расстояния от точки O до стороны AC .

б) **Прямая Эйлера.** Докажите, что точка M пересечения медиан лежит на отрезке HO и делит его в отношении $HM : MO = 2 : 1$.

6. **Лемма Архимеда.** Окружность ω касается окружности Ω внутренним образом в точке P и хорды AB окружности Ω в точке Q . Докажите, что прямая PQ проходит через середину дуги AB окружности Ω , не содержащей точки P .

7. **Лемма о проекции вершины на биссектрису.** Окружность ω касается сторон AB, AC, BC треугольника ABC в точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Докажите, что средняя линия треугольника ABC , параллельная CB , биссектриса угла B и прямая A_1B_1 пересекаются в одной точке.

8. **Лемма о симедиане.** Касательные к описанной окружности треугольника ABC , проведённые в точках A и C , пересекаются в точке P . Докажите, что $\angle ABP = \angle CBM$, где M — середина отрезка AC .

1. Докажите, что в неравностороннем треугольнике ABC точка пересечения серединного перпендикуляра к BC и биссектрисы угла A лежит на описанной окружности.

2. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Точки I_a, I_b, I_c — центры внеписанных окружностей, касающихся сторон BC, CA и AB соответственно. Точка W — середина дуги AC описанной окружности треугольника ABC , не содержащей B , а V — середина дуги AC описанной окружности треугольника ABC , содержащей B .

а) **Лемма о трезубце.** Докажите, что $WA = WC = WI = WI_b$.

б) **Внешняя лемма о трезубце.** Докажите, что $VA = VC = VI_c = VI_a$.

3. **Лемма об отражении ортоцентра.** Докажите, что точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно а) стороны; б) середины стороны, лежит на его описанной окружности.

4. а) **Окружность Эйлера (окружность девяти точек).** Докажите, что в треугольнике середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины и ортоцентр, лежат на одной окружности.

б) Докажите, что центр окружности Эйлера лежит в середине отрезка, концами которого являются ортоцентр и центр описанной окружности треугольника.

5. а) Точки H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC соответственно. Докажите, что длина отрезка BH вдвое больше расстояния от точки O до стороны AC .

б) **Прямая Эйлера.** Докажите, что точка M пересечения медиан лежит на отрезке HO и делит его в отношении $HM : MO = 2 : 1$.

6. **Лемма Архимеда.** Окружность ω касается окружности Ω внутренним образом в точке P и хорды AB окружности Ω в точке Q . Докажите, что прямая PQ проходит через середину дуги AB окружности Ω , не содержащей точки P .

7. **Лемма о проекции вершины на биссектрису.** Окружность ω касается сторон AB, AC, BC треугольника ABC в точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Докажите, что средняя линия треугольника ABC , параллельная CB , биссектриса угла B и прямая A_1B_1 пересекаются в одной точке.

8. **Лемма о симедиане.** Касательные к описанной окружности треугольника ABC , проведённые в точках A и C , пересекаются в точке P . Докажите, что $\angle ABP = \angle CBM$, где M — середина отрезка AC .