

Определение. Целая часть $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее данное число x . Дробная часть числа x определяется как $\{x\} = x - [x]$.

Свойства:

1. $[x + n] = [x] + n$, где n — целое.
2. $\{x + n\} = \{x\}$, где n — целое.
3. $[x + y] \geq [x] + [y]$;
4. $\{x + y\} \leq \{x\} + \{y\}$;
5. $\{x + y\} = \{\{x\} + \{y\}\}$.

1. Найдите все натуральные n , для которых число $[\frac{n^2}{5}]$ — простое.

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + [y] = \{z\} + 54, \\ y + [z] = \{x\} + 54, \\ z + [x] = \{y\} + 54. \end{cases}$$

3. Решите уравнение $\sqrt{1 + \{2x\}} = [x^2] + 2[x] + 3$.

4. Числа x, y, z, t таковы, что $\{x + y + z\} = \{y + z + t\} = \{z + t + x\} = \{t + x + y\} = \frac{1}{4}$. Найдите $\{x + y + z + t\}$.

5. Решите уравнение

$$[x] + \frac{2018}{[x]} = \{x\} + \frac{2018}{\{x\}}.$$

6. Решите уравнение $[x]^5 + \{x\}^5 = x^5$.

7. Существует ли рациональное число $x > 0$, для которого $\{x^2\} + \{x\} = 1$?

8. Докажите, что если $\{a\} + \{\frac{1}{a}\} = 1$, то $\{a^n\} + \{\frac{1}{a^n}\} = 1$.

9. Для $x > 1$ докажите неравенство

$$\frac{x + \{x\}}{[x]} - \frac{[x]}{x + \{x\}} + \frac{x + [x]}{\{x\}} - \frac{\{x\}}{x + [x]} > 5.$$

10. Решите уравнение $[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$.

11. Для натуральных чисел a, b, c, d найдите наименьшее значение выражения

$$\left[\frac{a + b + c}{d} \right] + \left[\frac{a + b + d}{c} \right] + \left[\frac{a + c + d}{b} \right] + \left[\frac{b + c + d}{a} \right].$$

12. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что

$$\left[\frac{p}{q} \right] + \left[\frac{2p}{q} \right] + \dots + \left[\frac{(q-1)p}{q} \right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Определение. Целая часть $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее данное число x . Дробная часть числа x определяется как $\{x\} = x - [x]$.

Свойства:

1. $[x + n] = [x] + n$, где n — целое.
2. $\{x + n\} = \{x\}$, где n — целое.
3. $[x + y] \geq [x] + [y]$;
4. $\{x + y\} \leq \{x\} + \{y\}$;
5. $\{x + y\} = \{\{x\} + \{y\}\}$.

1. Найдите все натуральные n , для которых число $[\frac{n^2}{5}]$ — простое.

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + [y] = \{z\} + 54, \\ y + [z] = \{x\} + 54, \\ z + [x] = \{y\} + 54. \end{cases}$$

3. Решите уравнение $\sqrt{1 + \{2x\}} = [x^2] + 2[x] + 3$.

4. Числа x, y, z, t таковы, что $\{x + y + z\} = \{y + z + t\} = \{z + t + x\} = \{t + x + y\} = \frac{1}{4}$. Найдите $\{x + y + z + t\}$.

5. Решите уравнение

$$[x] + \frac{2018}{[x]} = \{x\} + \frac{2018}{\{x\}}.$$

6. Решите уравнение $[x]^5 + \{x\}^5 = x^5$.

7. Существует ли рациональное число $x > 0$, для которого $\{x^2\} + \{x\} = 1$?

8. Докажите, что если $\{a\} + \{\frac{1}{a}\} = 1$, то $\{a^n\} + \{\frac{1}{a^n}\} = 1$.

9. Для $x > 1$ докажите неравенство

$$\frac{x + \{x\}}{[x]} - \frac{[x]}{x + \{x\}} + \frac{x + [x]}{\{x\}} - \frac{\{x\}}{x + [x]} > 5.$$

10. Решите уравнение $[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$.

11. Для натуральных чисел a, b, c, d найдите наименьшее значение выражения

$$\left[\frac{a + b + c}{d} \right] + \left[\frac{a + b + d}{c} \right] + \left[\frac{a + c + d}{b} \right] + \left[\frac{b + c + d}{a} \right].$$

12. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что

$$\left[\frac{p}{q} \right] + \left[\frac{2p}{q} \right] + \dots + \left[\frac{(q-1)p}{q} \right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$